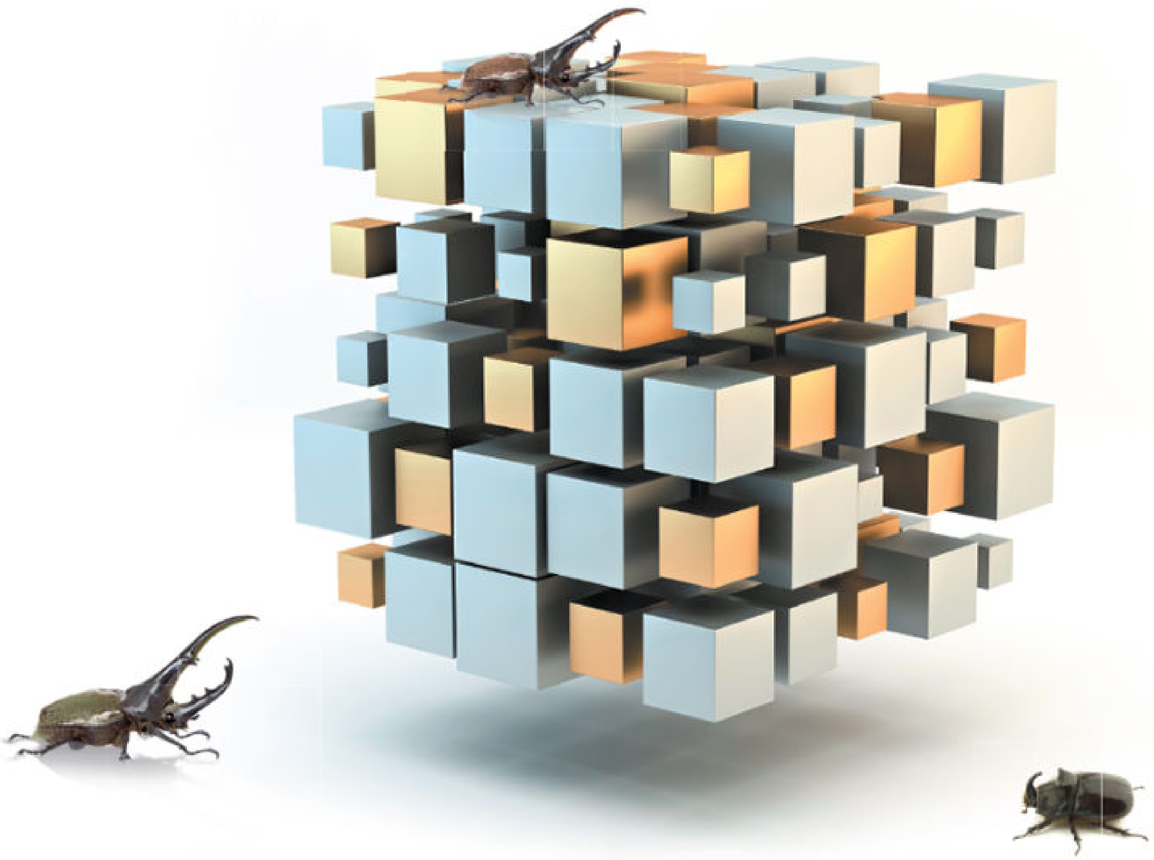
Secundaria 3er grado

# COMUNIDAD Matemática 3

Apolo Castrejón Villar
Alicia Vicuña Guante
Martha Lilia Reyes Salgador
Ortos Soyuz Castrejón Torres



Dirección de contenidos y servicios educativos
Elisa Bonilla Rius

Gerencia de publicaciones escolares
Felipe Ricardo Valdez González

Autores
Apolo Castrejón Villar, Alicia Vicuña Guante, Martha Lilia Reyes Salgador, Ortos Soyuz Castrejón Torres

Coordinación editorial
Ernesto Manuel Espinosa Asuar

Edición
César Jiménez Espinosa, Sócrates Bárcenas Armendáriz

Revisión y elaboración de evaluaciones
Cristóbal Bravo Marván

Coordinación de corrección
Abdel López Cruz

Corrección
Ilah de la Torre Ávila

Dirección de arte y diseño
Quetzatl León Calixto

Coordinación gráfica
Jesús Arana Trejo

Diseño de portada
José Calvillo

Diagramación
Víctor Martínez

Coordinación de iconografía e imagen
Ricardo Tapia García

Iconografía
Elia Pérez

Digitalización e imagen
Carlos A. López

Fotografía
© Thinkstock, 2014, © Carlos Vargas, 2014
© 2014 The M. C. Escher Company-Holland.
© Edouard Benedictus, 2014
© Archivo SM

Producción
Fanny Soto, Víctor Canto

*Comunidad Matemática 3*
Primera edición, 2015
Primera reimpresión, 2016

D. R. © SM de Ediciones, S. A. de C. V., 2015
Magdalena 211, Colonia del Valle,
03100, Ciudad de México.
Tel.: (55) 1087 8400
www.ediciones-sm.com.mx

ISBN 978-607-24-1592-8

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número 2830



Impreso en México/*Printed in Mexico*

# Presentación

El propósito de este libro es ayudar a que los alumnos aprendan el uso de las matemáticas por medio de actividades de construcción del conocimiento, al mismo tiempo que desarrollan competencias matemáticas que les den la formación para afrontar situaciones problemáticas en diversos ámbitos.

Los contenidos se organizan en cinco bloques. A la entrada de cada uno se presenta una imagen y un texto que plantean los problemas detonadores. Se recomienda una lectura grupal o por equipo de éstos, con el fin de que los alumnos propongan y compartan estrategias de solución en las cuales apliquen conocimientos previos. Estas sesiones son medulares para que los estudiantes asimilen que los conocimientos adquiridos sirven para resolver problemas.

En cada bloque se encuentra la sección "Juegos y retos", cuya finalidad es atraer la atención de los alumnos y permitir su participación activa: que analicen y reflexionen sobre las estrategias para resolver los juegos o sobre los planteamientos que hacen y su justificación.

Las lecciones pueden resolverse en una o dos sesiones. Cada una comienza con una pregunta que sirve para que el estudiante anticipe lo que va a aprender y ponga en juego sus conocimientos sobre el tema. Después, se plantean situaciones problemáticas junto con preguntas y ejercicios con el fin de que los alumnos tengan acceso al contenido. Se pone especial atención en que expresen, con sus palabras, lo que han aprendido y expongan argumentos. Asimismo, se incluyen recuadros de información para contrastar y complementar los conceptos y las estrategias de solución. Al terminar la lección, se retoma la pregunta inicial con el fin de complementar, corregir o formalizar los procedimientos empleados para contestarla.

Al final de cada bloque se encuentran la sección "TIC", ideada para aplicar las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza de las matemáticas, y la sección "Autoevaluación", la cual les permite a los alumnos evaluar, por sí mismos, la magnitud de los conocimientos adquiridos.

Se apoya el logro de los aprendizajes esperados con base en tres elementos:

- Para la planificación de la enseñanza, incluimos una propuesta de dosificación de las lecciones.
- Para la evaluación continua, agregamos en el índice los contenidos que se trabajarán en las lecciones.
- Para la evaluación final, enriquecimos el libro con reactivos de opción múltiple que permitirán detectar, por bloque, el nivel de logro; además, una evaluación tipo PISA, que posibilitará que los alumnos practiquen dicha prueba, aplicada a nivel nacional.

## Alumno:

¿Has notado todas las cosas que existen a tu alrededor y cuánto tienen que ver con las matemáticas? Incluso tú tienes que ver con ellas.

Por ejemplo, casi dos metros cuadrados de piel te protegen, alrededor de 40% de tu cuerpo es músculo, en promedio puedes reconocer 4000 olores y una sola gota de sangre contiene cerca de cinco millones de glóbulos rojos.

Las matemáticas son algo que empleas todos los días, incluso sin darte cuenta. Por eso, con este libro nos proponemos que las comprendas y que te gusten, y para ello es importante que te involucres en las actividades que se plantean. De esta manera desarrollarás y mejorarás tus habilidades matemáticas al reflexionar, analizar, argumentar y comprobar tus respuestas.

Las actividades grupales, en pareja o en equipo están diseñadas para que las discutas y comentes con tus compañeros. Ésta es una manera de descubrir tus errores y aprender estrategias distintas para hacer frente a un problema. Por eso es importante que participes en las discusiones y expongas tus puntos de vista.

Además, este libro contiene juegos que te ayudarán a seguir desarrollando el gusto por la asignatura; asimismo, te ayudarán a identificar las matemáticas en la naturaleza y en tu vida. Está hecho especialmente para ti. ¡Disfrútalo!

## Estimado profesor:

La intención de este material es facilitar la planeación de situaciones didácticas que despierten interés en los alumnos y los involucren en actividades de aprendizaje. Para ello se plantean juegos, retos, situaciones problemáticas y preguntas que invitan al análisis y a la reflexión.

El papel del docente en este trabajo es clave, ya que debe guiar a los alumnos para que desarrollen por sí mismos procesos de solución. Esto se logra mediante preguntas enfocadas a conocer cuál es el proceso de pensamiento que siguen y con indicaciones que permitan superar dificultades, pero sin externar la solución del problema. También es importante cerciorarse de que los alumnos hayan comprendido la situación problemática, y para ello debe fomentar que lean con cuidado para que interpreten correctamente el texto.

El trabajo grupal, sea en parejas, en equipos o en plenaria, es fundamental para que los alumnos pongan a prueba sus procedimientos de solución y los mejoren. Además, el diálogo con sus compañeros permite al estudiante desarrollar competencias argumentativas.

En el libro se presenta información de dos tipos: una que proporciona términos convencionales y otra que permite formalizar el conocimiento. Esta última nunca se debe usar como punto de partida, sino como una forma de comprobar que la construcción de un concepto o procedimiento, a partir de las actividades llevadas a cabo, es correcta o está completa.

Propiciar que los alumnos expliquen sus procedimientos y los conceptos adquiridos le permitirá obtener información sobre las ideas, los conceptos y las dificultades que tienen. No debe temer que los alumnos resuelvan problemas con métodos propios. La mejor forma de provocar una evolución hacia los procedimientos formales es plantearles problemas con un grado de dificultad que propicie la búsqueda de nuevas estrategias.

Atentamente,
los autores





| Semana | Sesión | Lecciones | Páginas |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Entrada de bloque | 18 y 19 |
| | 2 | De dos en dos | 20 y 21 |
| | 3 | 1 Ecuaciones cuadráticas I | 22 y 23 |
| | 4, 5 | 2 Ecuaciones cuadráticas II | 24 y 25 |
| 2 | 6, 7 | 3 Congruencia y semejanza I | 26 y 27 |
| | 8, 9 | 4 Congruencia y semejanza II | 28 y 29 |
| | 10 | 5 Congruencia y semejanza III | 30 y 31 |
| 3 | 11 | 6 Congruencia y semejanza IV | 32 y 33 |
| | 12, 13 | 7 Congruencia de triángulos I | 34 y 35 |
| | 14, 15 | 8 Congruencia de triángulos II | 36 y 37 |
| 4 | 16, 17 | 9 Congruencia de triángulos III | 38 y 39 |
| | 18 | 10 Semejanza de triángulos I | 40 y 41 |
| | 19, 20 | 11 Semejanza de triángulos II | 42 y 43 |
| 5 | 21 | Las escaleras | 44 y 45 |
| | 22, 23 | 12 Relaciones de proporcionalidad I | 46 y 47 |
| | 24, 25 | 13 Relaciones de proporcionalidad II | 48 y 49 |
| 6 | 26 | 14 Relaciones de proporcionalidad III | 50 y 51 |
| | 27 | 15 Funciones cuadráticas I | 52 y 53 |
| | 28 | 16 Funciones cuadráticas II | 54 y 55 |
| | 29 | ¿Pescador o pescado? | 56 y 57 |
| | 30 | 17 Escala de probabilidad | 58 y 59 |
| 7 | 31 | 18 Eventos independientes I | 60 y 61 |
| | 32, 33, 34 | 19 Eventos independientes II | 62 y 63 |
| | 35 | 20 Eventos complementarios y mutuamente excluyentes | 64 y 65 |
| 8 | 36, 37 | 21 Recolección de datos | 66 y 67 |
| | 38, 39, 40 | 22 Presentación y organización de datos | 68 y 69 |
| 9 | 41, 42, 43 | Repaso y Primera evaluación bimestral | 70 y 71 |
| | 44 | Evaluación tipo PISA | 72 |
| | 45 | TIC | 73 |
| | | Autoevaluación | 73 |

# Bloque 2

| Semana | Sesión | Lecciones | Páginas |
|---|---|---|---|
| 10 | 46 | Entrada de bloque | 74 y 75 |
| | 47 | Figurirretos | 76 y 77 |
| | 48 | 23 Factorización I | 78 y 79 |
| | 49 | 24 Factorización II | 80 y 81 |
| | 50 | | |
| 11 | 51 | 25 Solución de ecuaciones I | 82 y 83 |
| | 52 | | |
| | 53 | 26 Solución de ecuaciones II | 84 y 85 |
| | 54 | 27 Solución de ecuaciones III | 86 y 87 |
| | 55 | | |
| 12 | 56 | 28 Traslación de figuras | 88 y 89 |
| | 57 | | |
| | 58 | 29 Rotación de figuras I | 90 y 91 |
| | 59 | | |
| | 60 | 30 Rotación de figuras II | 92 y 93 |
| 13 | 61 | 31 Transformaciones equivalentes | 94 y 95 |
| | 62 | | |
| | 63 | 32 Diseños | 96 y 97 |
| | 64 | | |
| | 65 | Rompecabezas cuadrados | 98 y 99 |
| 14 | 66 | 33 Teorema de Pitágoras I | 100 y 101 |
| | 67 | | |
| | 68 | 34 Teorema de Pitágoras II | 102 y 103 |
| | 69 | 35 Teorema de Pitágoras III | 104 y 105 |
| | 70 | | |
| 15 | 71 | 36 Teorema de Pitágoras IV | 106 y 107 |
| | 72 | | |
| | 73 | 37 Regla de la suma I | 108 y 109 |
| | 74 | | |
| | 75 | 38 Regla de la suma II | 110 y 111 |
| 16 | 76 | Repaso y Primera evaluación bimestral | 112 y 113 |
| | 77 | | |
| | 78 | | |
| | 79 | Evaluación tipo PISA | 114 |
| | 80 | TIC | 115 |
| | | Autoevaluación | 115 |



# Bloque 3

| Semana | Sesión | Lecciones | Páginas |
|---|---|---|---|
| 17 | 81 | Entrada de bloque | 116 y 117 |
| | 82 | Un pastel muy funcional | 118 y 119 |
| | 83 | 39 Fórmula general I | 120 y 121 |
| | 84 | | |
| | 85 | 40 Fórmula general II | 122 y 123 |
| 18 | 86 | 41 Fórmula general III | 124 y 125 |
| | 87 | | |
| | 88 | Tales segmentos divididos en tales razones | 126 y 127 |
| | 89 | 42 Congruencia de triángulos | 128 y 129 |
| | 90 | | |
| 19 | 91 | 43 Semejanza de triángulos | 130 y 131 |
| | 92 | | |
| | 93 | 44 Teorema de Tales I | 132 y 133 |
| | 94 | | |
| | 95 | 45 Teorema de Tales II | 134 y 135 |
| 20 | 96 | 46 Teorema de Tales III | 136 y 137 |
| | 97 | | |
| | 98 | 47 Teorema de Tales IV | 138 y 139 |
| | 99 | | |
| | 100 | La caja negra | 140 y 141 |
| 21 | 101 | 48 Homotecias I | 142 y 143 |
| | 102 | 49 Homotecias II | 144 y 145 |
| | 103 | | |
| | 104 | 50 Homotecias III | 146 y 147 |
| | 105 | | |
| 22 | 106 | 51 Homotecias IV | 148 y 149 |
| | 107 | | |
| | 108 | Los dados | 150 y 151 |
| | 109 | 52 Gráficas de funciones I | 152 y 153 |
| | 110 | | |
| 23 | 111 | 53 Gráficas de funciones II | 154 y 155 |
| | 112 | | |
| | 113 | 54 Interpretación y elaboración de gráficas I | 156 y 157 |
| | 114 | | |
| | 115 | 55 Interpretación y elaboración de gráficas II | 158 y 159 |
| 24 | 116 | 56 Regla del producto | 160 y 161 |
| | 117 | | |
| | 118 | 57 Problemas de probabilidad | 162 y 163 |
| | 119 | | |
| | 120 | | |
| 25 | 121 | Repaso y Primera evaluación bimestral | 164 y 165 |
| | 122 | | |
| | 123 | | |
| | 124 | Evaluación tipo PISA | 166 |
| | 125 | TIC | 167 |
| | | Autoevaluación | 167 |

| Semana | Sesión | Lecciones | Páginas |
|---|---|---|---|
| 26 | 126 | Entrada de bloque | 168 y 169 |
| | 127 | Los números poligonales | 170 y 171 |
| | 128 | 58 Sucesiones cuadráticas I | 172 y 173 |
| | 129 | | |
| | 130 | 59 Sucesiones cuadráticas II | 174 y 175 |
| 27 | 131 | | |
| | 132 | Rehilete geométrico | 176 y 177 |
| | 133 | 60 Sólidos de revolución | 178 y 179 |
| | 134 | | |
| | 135 | 61 Desarrollo plano de un cilindro | 180 y 181 |
| 28 | 136 | | |
| | 137 | 62 Desarrollo plano de un cono | 182 y 183 |
| | 138 | | |
| | 139 | ¿De dónde salió el cuadrito? | 184 y 185 |
| | 140 | 63 Pendiente de una recta I | 186 y 187 |
| 29 | 141 | | |
| | 142 | 64 Pendiente de una recta II | 188 y 189 |
| | 143 | | |
| | 144 | 65 Razones trigonométricas I | 190 y 191 |
| | 145 | | |
| 30 | 146 | 66 Razones trigonométricas II | 192 y 193 |
| | 147 | | |
| | 148 | 67 Razones trigonométricas III | 194 y 195 |
| | 149 | | |
| | 150 | 68 Razones trigonométricas IV | 196 y 197 |
| 31 | 151 | | |
| | 152 | Vida de cuadritos | 198 y 199 |
| | 153 | 69 Razón de cambio I | 200 y 201 |
| | 154 | | |
| | 155 | 70 Razón de cambio II | 202 y 203 |
| 32 | 156 | | |
| | 157 | 71 Razón de cambio III | 204 y 205 |
| | 158 | | |
| | 159 | 72 Razón de cambio IV | 206 y 207 |
| | 160 | | |
| 33 | 161 | 73 Medidas de dispersión I | 208 y 209 |
| | 162 | | |
| | 163 | 74 Medidas de dispersión II | 210 y 211 |
| | 164 | | |
| | 165 | | |
| 34 | 166 | Repaso y<br>Primera evaluación bimestral | 212 y 213 |
| | 167 | | |
| | 168 | | |
| | 169 | Evaluación tipo PISA | 214 |
| | 170 | TIC | 215 |
| | | Autoevaluación | 215 |





| Semana | Sesión | Lecciones | Páginas |
|---|---|---|---|
| 35 | 171 | Entrada de bloque | 216 y 217 |
| | 172 | Cálculos rápidos | 218 y 219 |
| | 173 | 75 Problemas y ecuaciones I | 220 y 221 |
| | 174 | | |
| | 175 | 76 Problemas y ecuaciones II | 222 y 223 |
| 36 | 176 | | |
| | 177 | Rompecabezas de sombras | 224 y 225 |
| | 178 | 77 Secciones | 226 y 227 |
| | 179 | 78 Volumen del cilindro y del cono I | 228 y 229 |
| | 180 | | |
| 37 | 181 | 79 Volumen del cilindro y del cono II | 230 y 231 |
| | 182 | 80 Volumen del cilindro y del cono III | 232 y 233 |
| | 183 | | |
| | 184 | 81 Volumen del cilindro y del cono IV | 234 y 235 |
| | 185 | | |
| 38 | 186 | Justicia ciega | 236 y 237 |
| | 187 | 82 Variación lineal y cuadrática I | 238 y 239 |
| | 188 | | |
| | 189 | 83 Variación lineal y cuadrática II | 240 y 241 |
| | 190 | | |
| 39 | 191 | 84 Juegos justos I | 242 y 243 |
| | 192 | | |
| | 193 | 85 Juegos justos II | 244 y 245 |
| | 194 | | |
| | 195 | | |
| 40 | 196 | Repaso y<br>Primera evaluación bimestral | 246 y 247 |
| | 197 | | |
| | 198 | | |
| | 199 | Evaluación tipo PISA | 248 |
| | 200 | TIC | 249 |
| | | Autoevaluación | 249 |

# Guía de uso

A continuación te mostramos la manera en la que se encuentra organizado tu libro.

Está dividido en cinco bloques y cada uno se inicia con dos páginas.

Entrada de bloque. Se enuncian los aprendizajes esperados. Esto se hace con la finalidad de que sepas lo que aprenderás y aplicarás durante el estudio de cada bloque.

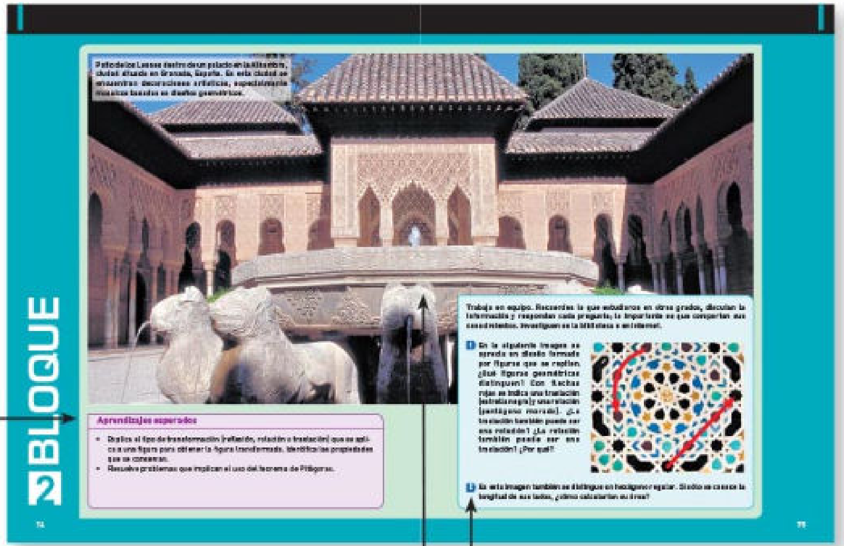
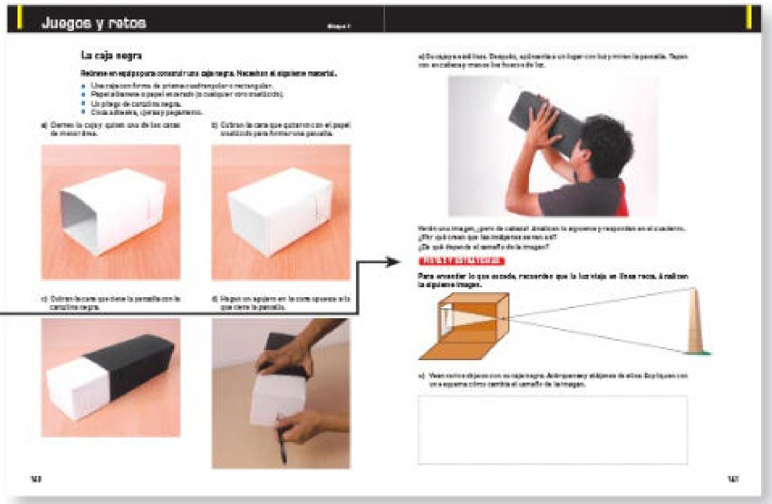



Imagen que, junto con un breve texto, plantea una situación de la que se desprenden problemas detonadores.

Preguntas detonadoras para que reflexiones y conozcas el tipo de problemas que estudiarás en el bloque.

Dentro del bloque encontrarás la sección Juegos y retos, cuyo propósito es introducirte en los temas, de forma que participes en actividades que involucran los conocimientos que estudiarás después.

La sección Pistas y estrategias se incluye frecuentemente al final de "Juegos y retos". En ella encontrarás ayuda para resolver los desafíos planteados.

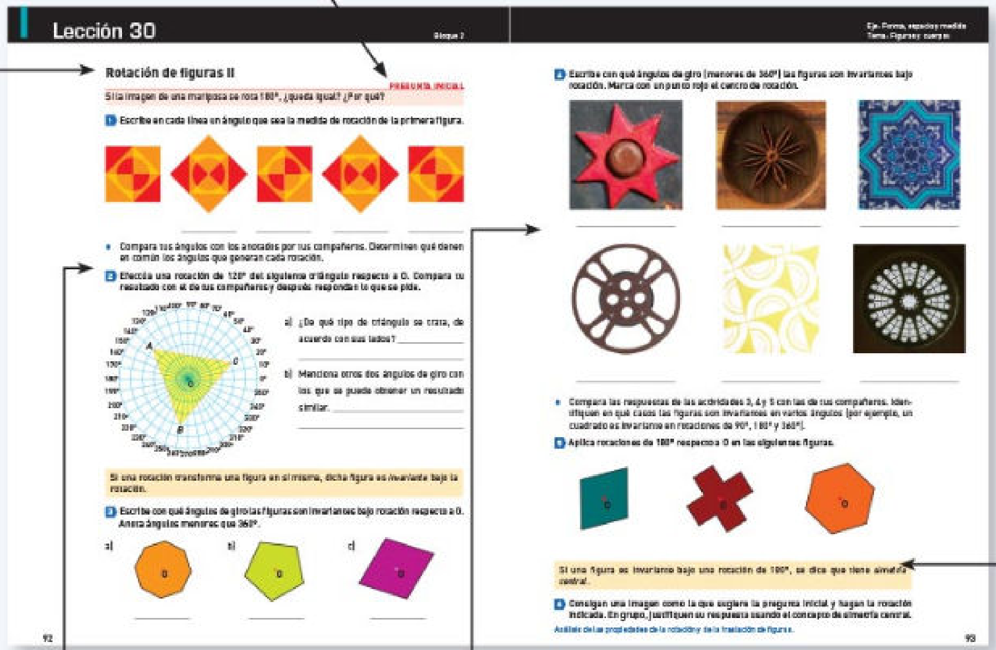



Todas las lecciones se componen de dos páginas.

**Título de la lección**
Los títulos de cada lección indican los conceptos que se estudiarán.

**Pregunta inicial**
Con ella te darás cuenta de lo que estudiarás en la lección y lo que sabes del tema. Trabaja en equipo o individualmente para responderla.

**Información**
Cuando es necesario, los conceptos importantes de la sección aparecen dentro de un recuadro.




**Actividades de construcción del conocimiento**
Actividades numeradas dentro de las lecciones. Se plantean situaciones problemáticas y preguntas para que desarrolles conocimientos y habilidades matemáticas. Estas actividades están graduadas de forma que vayas integrando poco a poco los conocimientos.

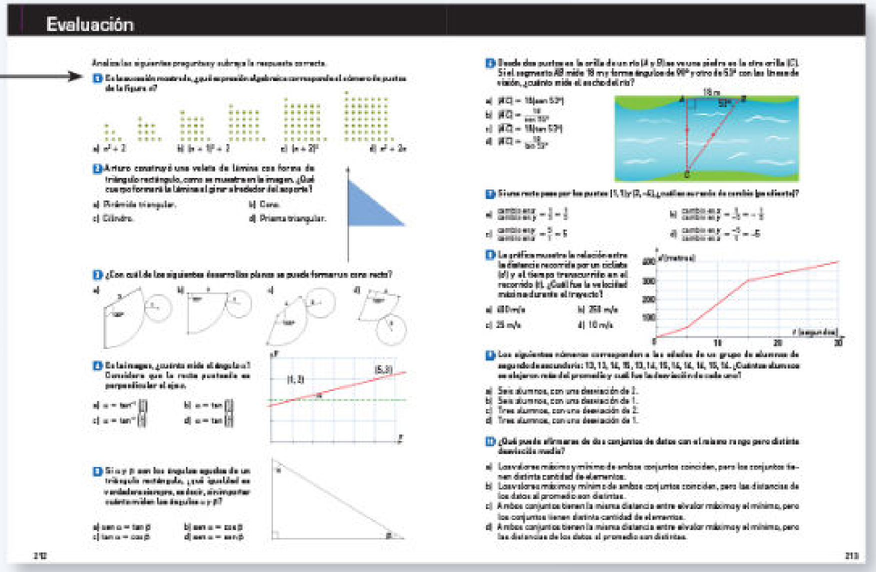
Con estas actividades se pretende que:
- observes e interpretes,
- organices resultados,
- discutas y analices,
- encuentres regularidades,
- reflexiones,
- profundices en las ideas básicas.

También hallarás las siguientes cápsulas.

**Observa**
Pistas o información de apoyo útiles para resolver las actividades planteadas en las lecciones.

**Recuerda**
Recordatorio de conceptos o técnicas que ya conoces.

**TIC**
Sugerencias de actividades o direcciones electrónicas relacionadas con el uso de las TIC.
Consultadas del 2 al 30 de septiembre de 2014.

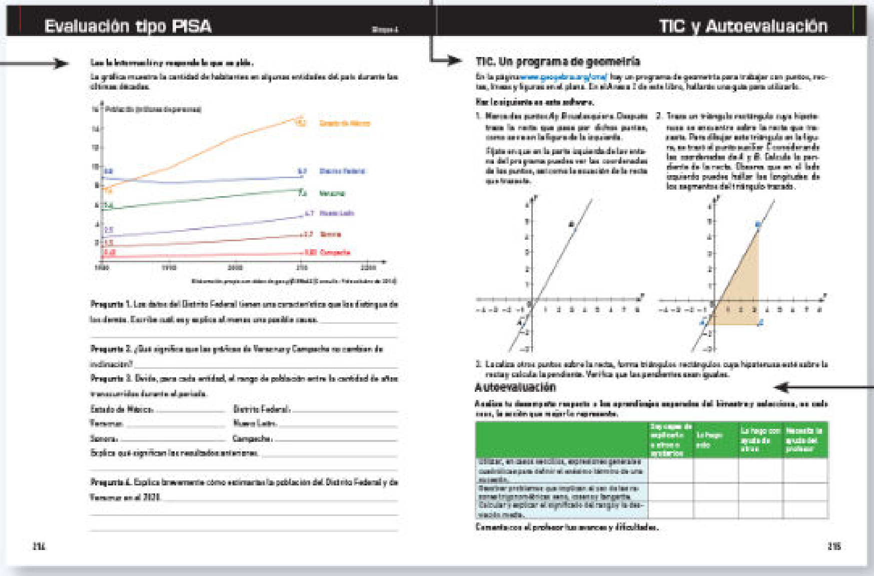



La **Evaluación** permite estimar tu nivel de aprendizaje.

La **Evaluación tipo PISA** es un ensayo de la prueba que se aplica a nivel nacional.

**TIC:** te guía para que apliques la tecnología al aprender las matemáticas.

**Autoevaluación** es una actividad para que valores individualmente lo que has aprendido.




Entre las páginas 250 y 256 encontrarás el **Anexo 1** y el **Anexo 2**, con tablas trigonométricas y el uso del programa GeoGebra, el **Glosario**, la **Bibliografía** consultada y sugerida, además de los **Enlaces web** sugeridos y los recomendados en las cápsulas TIC. Los términos del glosario aparecen **resaltados** en las lecciones.

# BLOQUE 1

La Torre de Pisa empezó a inclinarse desde el inicio de su construcción en 1173, y se calcula que permanecerá estable otros tres siglos. Ahora, miles de turistas la visitan cada año.

## Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Trabaja en equipo. Recuerden lo que estudiaron en otros grados, discutan la información y respondan cada pregunta; lo importante es que compartan sus conocimientos. Investiguen en la biblioteca o en internet.

1. Julieta trajo de Pisa una fotografía de la torre que mide 12 cm × 16 cm. Si el marco tiene 128 cm$^2$ de área, ¿cuál es su ancho?

2. Se cree que Galileo Galilei dejaba caer objetos desde lo alto de la torre para comprobar la velocidad de caída de un cuerpo. Hoy sabemos que la aceleración en caída libre depende de $g$, la aceleración de la gravedad. Investiga cuál es el valor de $g$.

## De dos en dos

### El Príncipe de las matemáticas

Carl Friedrich Gauss fue un niño prodigio al que luego se le llamó "Príncipe de las matemáticas". Cuando tenía diez años de edad, su maestro propuso en clase calcular la suma de todos los números del 1 al 100. Es decir, calcular:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$$

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

A los pocos minutos de planteado el problema, Gauss entregó su resultado. Los demás estudiantes de la clase tardaron bastante más. Cuando el maestro revisó, se dio cuenta de que la única respuesta correcta la había dado el niño Gauss.

En realidad, no era que Gauss sumara con la velocidad de una computadora, sino que encontró un procedimiento para obtener la suma de cualesquiera números consecutivos.

Aunque no lo creas, una forma de sumar varios números consecutivos con rapidez es hallar primero el doble de la misma suma.

**Efectúa el siguiente procedimiento para sumar 1 + 2 + 3 + 4 + 5.**

a) Suma los números de cada columna como se ve en el ejemplo.

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 \\ + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 6 & + & \square & + & \square & + & \square & + & \square \end{array}$$

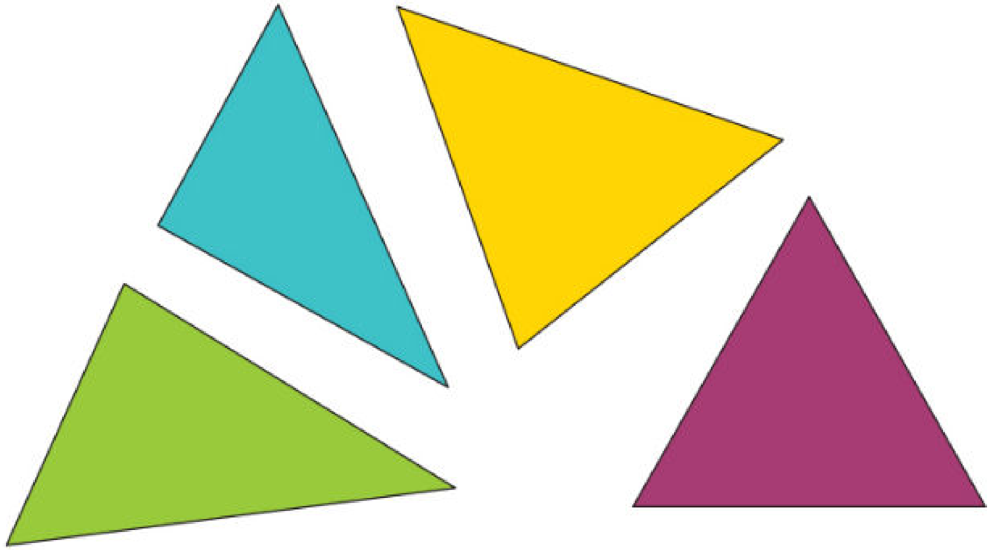
b) Si sumas los números que obtuviste, ¿obtendrías el doble de la suma buscada?, ¿por qué?
c) ¿Cómo obtendrías rápidamente la suma total?
d) Reúnete con un compañero y encuentren la suma de los números del 1 al 10 utilizando este procedimiento.
e) Calculen el resultado de la suma de los números del 1 al 100 y expliquen su procedimiento en el siguiente espacio.

f) Si sumas los números desde 1 hasta $n$, donde $n$ es cualquier número, se obtiene 74 305; por tanto, ¿cuánto vale $n$?



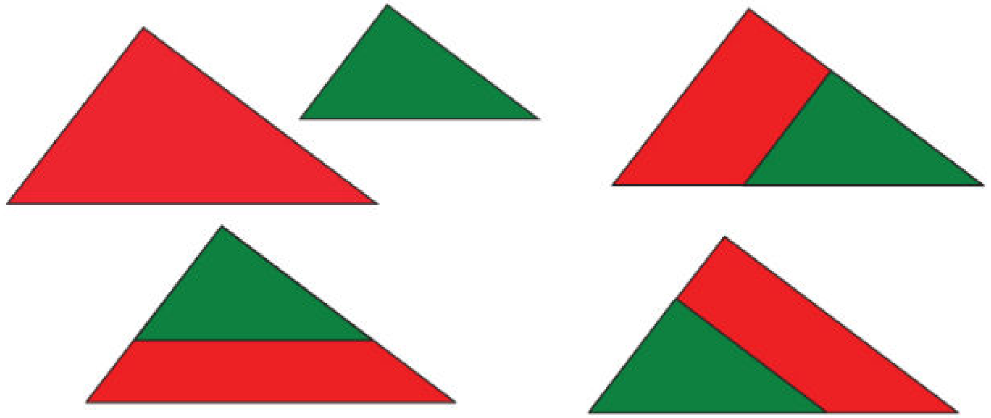
## Iguales, pero chiquitos

Trabaja con un compañero. Para participar en el juego, copien en una cartulina los siguientes triángulos y recórtenlos.



a) Repartan los triángulos al azar, dos para cada uno.
b) Luego deberán trazarlos, pero para hacerlo usen como plantilla los triángulos recibidos; si lo prefieren, usen regla y compás para hacer sus mediciones y trazos.
c) Las reproducciones deben ser más pequeñas que los triángulos originales, pero deben encajar en cada vértice del triángulo que reprodujeron. Por ejemplo:

El triángulo verde encaja en los tres vértices del triángulo rojo.



Gana quien logre reproducir primero los triángulos que le tocaron.

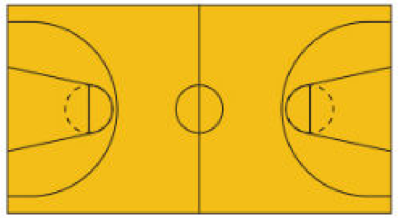
## Ecuaciones cuadráticas I

PREGUNTA INICIAL

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^2 + 2 = 3$?

**1** **Formen equipos de tres o cuatro integrantes. Analicen cada una de las siguientes situaciones, hagan los cálculos necesarios y contesten las preguntas. Pueden usar calculadora.**

a) El área de una cancha de basquetbol es de 420 m². Si el largo mide 14 metros más que el ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?



Sus dimensiones son ____________

b) Un terreno cuadrado tiene un área de 676 cm². ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

Cada lado mide ____________ cm.

c) Encuentren dos números consecutivos tales que su producto sea 24 492. (Hay dos soluciones.)

Los números son ________ y ________ o ________ y ________

**Recuerda**
El producto de dos números negativos es positivo.

d) Si al cuadrado de un número se le resta 37, se obtiene 132. ¿Cuál es el número? (Hay dos soluciones.)

El número es ____________ o ____________

e) El cuadrado de un número más cuatro veces el mismo es igual a –4. ¿Cuál es ese número?

El número es ______________________________

f) Al resultado de multiplicar un número por sí mismo se le suma cuatro veces el número inicial y se obtiene 21. ¿Cuál es el número inicial? (Hay dos soluciones.)

El número es ____________ o ____________

- Comparen sus respuestas y estrategias de solución con las de sus compañeros. Identifiquen las dificultades que afrontaron y describan ante el grupo cómo las resolvieron.

**2** **Escribe una ecuación que corresponda a cada uno de los problemas anteriores. Observa el ejemplo.**

a) ____ $x^2 = 676$ ____ b) ____________ c) ____________

d) ____________ e) ____________ f) ____________





**3** **Ahora calculemos la longitud de los lados de un cuadrado que tiene 100 m² menos que el cuadrado del inciso a) de la actividad 1.**

**Recuerda**
La *solución* o soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que se cumpla la igualdad.

Inicialmente se tiene que $x^2 = 676$. Completa el siguiente procedimiento considerando las nuevas condiciones del problema:

a) $x^2 = 676 - 100$

b) $x^2 =$ ______

c) $x = \pm\sqrt{\_\_\_\_}$

d) $x = -24$ o $x =$ __________

e) Para este caso, ¿sirve la solución $x = -24$? ____ ¿Por qué? ______________

______________________________

______________________________

- Discutan ante el grupo cómo obtuvieron sus respuestas y el procedimiento que siguieron para encontrarlas.

**4** **Revisa los siguientes procedimientos y escribe los valores que faltan.**

a) $2x^2 \cdot 18$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{18}{2}$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{\phantom{00}}$

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

b) $x^2 \cdot 5 \cdot 20$

$x^2 - 5 + 5 = 20 + 5$

$x^2 =$ ____

$x = \pm\sqrt{25}$

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

c) $6x^2 \cdot 6 \cdot 6$

$6x^2 - 6 + 6 = 6 + 6$

$6x^2 = 12$

$\frac{6x^2}{6} = \frac{12}{6}$

$x^2 =$ ____

$x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = 1.414$

$x_2 =$ ____

d) $\frac{x^2}{3} \cdot 1 \cdot 13$

$\frac{x^2}{3} = 12$

$3\left(\frac{x^2}{3}\right) = 3(12)$

$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36}$

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

**5** **Trabaja en pareja con un compañero. Efectúen las actividades.**

a) Resuelvan la ecuación $x^2 + 5 = 30$ usando la raíz cuadrada.
b) Comparen sus soluciones con las otros equipos y elijan las correctas.
c) Resuelvan en el cuaderno las siguientes ecuaciones usando la raíz cuadrada.

$x^2 - 256 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 5 = 149$ $\qquad$ $2x^2 - 8 = 2\,330$

**6** **Para resolver la pregunta inicial de esta lección, trabajen en equipo y obtengan algebraicamente la respuesta. Seleccionen a un compañero para que desarrolle en el pizarrón el procedimiento usado en esta actividad.**

- Discutan con el grupo y con ayuda del profesor cómo obtuvieron sus respuestas y el procedimiento que siguieron para encontrarlas.

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

## Ecuaciones cuadráticas II

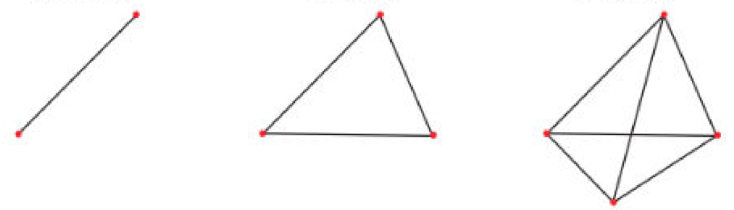
**PREGUNTA INICIAL**

¿Cómo puede resolverse la ecuación $x(x - 1) = 0$

**1** **Lean en equipos el siguiente problema y hagan lo que se pide.**

En un parque, los bancos están colocados de manera que cada uno está comunicado con los otros por medio de un camino recto. Además, no hay tres bancos que se encuentren en la misma línea recta. Observen los casos en los que hay 2, 3 y 4 bancos.

2 bancos 3 bancos 4 bancos



1 camino 3 caminos 6 caminos

a) Completen la tabla anotando cuántos caminos son necesarios para unir los bancos. Si es conveniente, elaboren esquemas en su cuaderno.

| Bancos | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| Caminos | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 |

b) ¿Cuántos caminos son necesarios para unir 10 bancos? ____________

c) ¿Cuántos bancos se unen con 55 caminos? ____________

**2** **Observen la tabla e identifiquen la relación que hay entre los datos de las dos filas. Escriban el signo · o · y el número que sea necesario para que se cumplan las ecuaciones entre los siguientes números consecutivos.**

a) (5 ___ 6) ___ ___ = 15

b) (6 ___ 7) ___ 2 = 21

c) (7 ___ 8) ___ ___ = 28

**3** **Si $x$ representa el número de bancos, completen las siguientes afirmaciones.**

a) $\frac{x(6)}{2} = 21$, entonces $x =$ ___

b) $\frac{x(7)}{2} = 28$, entonces $x =$ ___

c) $\frac{x(8)}{2} = 36$, entonces $x =$ ___

d) De acuerdo con lo anterior, escriban la ecuación que permite encontrar el número de caminos que une cualquier cantidad de bancos. ____________





e) Utilicen esta ecuación para comprobar los datos que obtuvieron en la tabla. ¿Es la misma solución que encontraron antes? ______

f) ¿Cuántos caminos se necesitan para unir 36 bancos? ______

g) Encuentren el número de bancos unidos con 666 caminos. ______

h) Comparen con los demás equipos los procedimientos que usaron para resolver las ecuaciones anteriores y determinen cuáles son correctos.

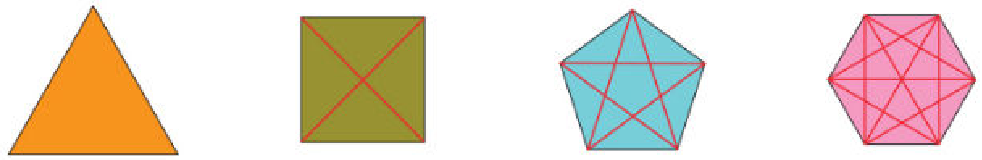
**4** **¿Cómo puede emplearse la ecuación que encontraron para hallar los números consecutivos que suman 74 305?** ____________

**5** **Analiza y resuelve los siguientes problemas.**

a) Un grupo de personas se reúnen y al saludarse cada una de ellas estrecha la mano de las restantes. Si hubo 28 saludos, ¿cuántas personas se reunieron? ________

b) La diagonal de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos. En los siguientes polígonos se han trazado todas sus diagonales.

0 diagonales 2 diagonales 5 diagonales 9 diagonales



¿Cuántos son los lados de un polígono regular que tiene 104 diagonales? ________

**6** **Expresa $x(x \cdot 1) \cdot 110$ como una ecuación cuadrática.** ____________

a) La ecuación que encontraste tiene una solución negativa, ¿cuál es? ________

**7** **Plantea en tu cuaderno un problema para cada una de las siguientes ecuaciones y resuélvelos.**

a) $x^2 + x = 56$ b) $x^2 + x - 12 = 0$ c) $(x - 5)(x - 1) = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

b) Intercambia problemas con un compañero y resuélvelos. Comparen sus procedimientos de solución.

**8** **Trabajen en equipo para resolver la ecuación planteada al inicio de esta lección, comprueben y justifiquen en su cuaderno la siguiente información.**

Para $x(x - 1) = 0$ las soluciones son $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, pues son los únicos valores que hacen que la igualdad se cumpla.

- Discutan ante el grupo cómo obtuvieron sus respuestas y el procedimiento que siguieron para encontrarlas.

**TIC**

Ingresa al sitio <www.skoool.es/content/ks4/maths/solv_quad_equations/launch.html>, ahí encontrarás actividades de resolución de ecuaciones cuadráticas. Selecciona una, intercámbiala con un compañero y resuélvanla. Después comenten los procedimientos que emplearon.

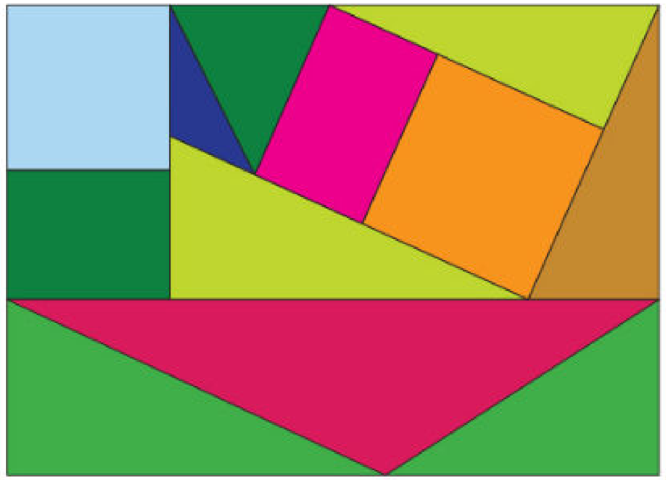
Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, empleando procedimientos personales u operaciones inversas.

## Congruencia y semejanza I

PREGUNTA INICIAL

¿Qué medidas es necesario conocer para reproducir un triángulo equilátero al mismo tamaño y cómo lo harías?

**1** Copia la figura en el recuadro que se encuentra debajo de ella.



Usa solamente regla, compás y transportador.

**Observa**

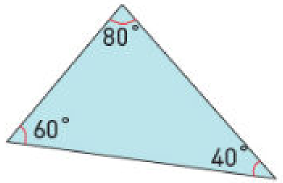
Un *triángulo equilátero* tiene los tres lados y ángulos iguales. Si quieres trazar un triángulo de este tipo sin temor a que sus lados sean distintos, traza una circunferencia y su radio; a partir de este radio, traza otros dos que formen ángulos de 120° con el primero. Después, sólo une los tres puntos en los que se juntan los radios con la circunferencia.

- Reúnete en equipo, comparen sus respuestas, corríjanlas si es necesario y comenten las estrategias que usaron para copiar la figura. En especial, discutan qué medidas reprodujeron para hacerlo.





**2** Reproduce el siguiente triángulo en tu cuaderno sin tomar medida alguna, sólo considera los datos indicados en la imagen.




a) Comenta en equipo si pudieron reproducir el triángulo al mismo tamaño. Si lo hicieron, expliquen cómo. Si no, anoten por qué y determinen qué otras medidas necesitarían conocer para hacerlo. Escriban sus conclusiones en el siguiente espacio.

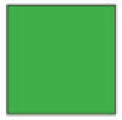
______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

- Comparen sus conclusiones con las del resto del grupo y lleguen a un acuerdo acerca de cuáles son correctas.

**3** Juan dice que como la figura es un cuadrado, sólo es necesario conocer la medida de un lado para reproducirlo.



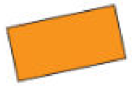
a) ¿Es cierto lo que dice? ________ ¿Por qué? ______________________

______________________________________________

b) ¿Qué información sabe Juan acerca de los ángulos del cuadrado? ______________

______________________________________________

**4** Alicia dice que sólo es necesario conocer las medidas de dos lados de este rectángulo para reproducirlo.



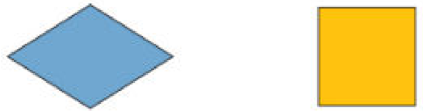
a) ¿Qué medidas conoce ella? ______________________________

______________________________________________

b) ¿Qué información conoce Alicia sobre los ángulos de la figura? ______________

**5** Lee la información del siguiente recuadro y contesta en tu cuaderno.

La reproducción de una figura al mismo tamaño y forma es una figura congruente con la original. Tienen lados y ángulos congruentes cuando miden lo mismo.



Los lados de las figuras tienen la misma medida. ¿Son congruentes? ¿Por qué?

**6** Comenta con tus compañeros si es necesario conocer sólo las medidas de los lados, sólo las de los ángulos o ambas para trazar una figura congruente a un triángulo equilátero. Comprueba tus resultados dibujando un triángulo equilátero y pide a uno de tus compañeros que lo reproduzca.

Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

## Congruencia y semejanza II

**PREGUNTA INICIAL**

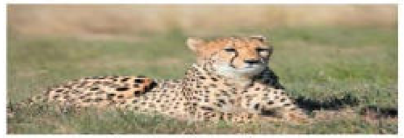
Si una fotografía se amplía al doble, ¿cómo son las medidas de sus lados respecto a las de la original?

**1** **Analiza las cosas que hizo Elena, observa las fotografías y después contesta en tu cuaderno las preguntas de la siguiente página.**

A Elena le gustan mucho los felinos y tiene en su computadora esta fotografía de un guepardo, el animal que corre más rápido.

Elena quiso hacer en su computadora cinco reproducciones a distintos tamaños, pero varias le salieron mal porque no conoce bien el programa.

Reproducción 1



Reproducción 2

Reproducción 3

Reproducción 4

Reproducción 5





a) ¿Qué reproducciones le quedaron bien a Elena?
b) ¿Por qué las otras reproducciones no están bien?
c) Mide las dimensiones de la fotografía original y anótalas.
d) En la reproducción 1, Elena quería hacer una ampliación que midiera 8 cm de largo. ¿Cuánto debería medir el ancho?
e) En la reproducción 2, Elena quería una reducción que midiera 2 cm de ancho. ¿Cuánto debería medir el largo?
f) Mide las dimensiones de la reproducción 4 y anótalas.
g) Si el largo de la reproducción 4 es el que Elena quería, ¿cuánto debería medir el ancho para que fuera correcta?
h) Si el ancho de la reproducción 4 es el que Elena quería, ¿cuánto debería medir el largo para que fuera correcta?
i) ¿Qué medidas podría tener una ampliación o reducción correcta de la fotografía? Anota otras medidas, además de las que ya calculaste.

**2** **Dibuja un rectángulo cuyas dimensiones sean iguales a las de una reducción o una ampliación de la fotografía del guepardo. Anota sus medidas y explica cómo las calculaste.**

Largo: ______________ Ancho: ______________

Las calculé: ______________________________________________

______________________________________________

Una figura es semejante a otra si es más grande o pequeña que la original pero conserva la misma forma.

**3** **Elaboren, guiados por el profesor, una lista de características que deben cumplir las figuras semejantes.**

**4** **Para contestar la pregunta inicial de esta lección, discutan ante el grupo si los lados de la fotografía ampliada al doble miden el doble de los de la fotografía original.**

Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

## Congruencia y semejanza III

**PREGUNTA INICIAL**

¿Qué relación tienen las dimensiones de un rectángulo con las de su ampliación o reducción?

**1** Mide el largo y el ancho del siguiente rectángulo.

Largo: ________ cm

Ancho: ________ cm

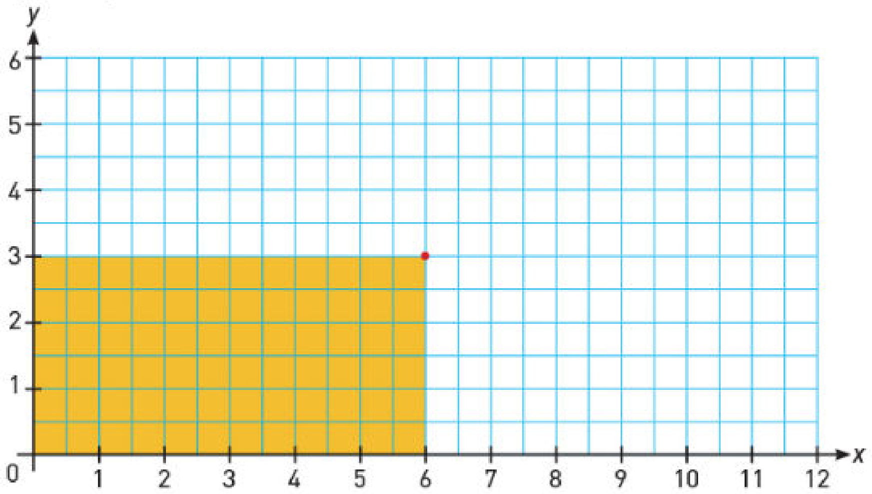
a) Completa la tabla con las dimensiones de reproducciones a escala del rectángulo anterior.

| Largo (cm) | | 2 | | 5 | 7 | 8 | | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ancho (cm) | 0.5 | | 2 | | | | 5 | |

b) ¿Qué relación existe entre el largo y el ancho de cada rectángulo de la tabla? Exprésalo como un cociente: ________________

c) El rectángulo original se dibujó en el plano cartesiano. Ahora tú dibuja los rectángulos con las medidas de la tabla que completaste. Uno de los vértices debe estar sobre el punto de coordenadas (0, 0) y uno de los lados largos sobre el eje *x*.

d) En el plano se marcó con rojo el punto del rectángulo original con coordenadas (6, 3). Marca de igual manera los puntos correspondientes de los rectángulos que dibujaste.




e) Une los puntos que acabas de marcar. ¿Qué observas? ________________

________________

**Observa**

El plano cartesiano consta de dos rectas numéricas que se cortan en un punto formando cuatro ángulos rectos. La horizontal se llama eje de las abscisas o eje *x*, y la vertical, eje de las ordenadas o eje *y*. En el eje *x* se marcan valores que no dependen de otros; en cambio, el eje *y* siempre toma valores que dependen de los que hay en la horizontal.

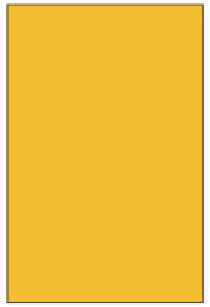




f) Dibuja en el plano cartesiano de la página anterior otros dos rectángulos que sean una reproducción del original. ¿Qué observas? ________________

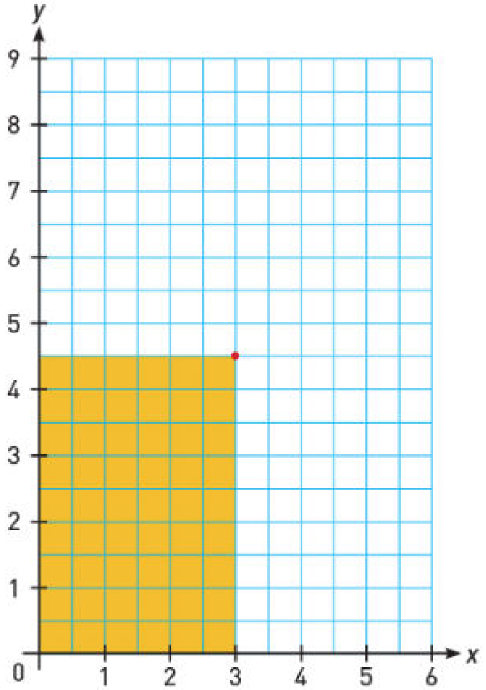
g) Reflexiona respecto a los datos de la tabla del inciso a), ¿son de proporcionalidad directa? ________________

**2** **Mide el largo y el ancho del rectángulo dibujado en el plano y escribe las medidas debajo de éste.**



Largo: ________ cm

Ancho: ________ cm




| Largo (cm) | Ancho (cm) | Proporción |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 3 | 2 | $\frac{2}{3}$ |
| 6 | | |
| | 5 | |
| 9 | | |

a) Llena las dos columnas de la izquierda de la tabla con las dimensiones de los rectángulos a escala indicados ahí mismo.

b) El ejemplo resuelto en la tabla indica que para ese rectángulo hay una proporción de $\frac{2}{3}$ en relación con el original. Calcula en tu cuaderno las proporciones en los demás rectángulos de la tabla.

c) Traza en el plano los rectángulos que corresponden a las dimensiones que calculaste en la tabla. Haz tus trazos aplicando la misma orientación que en el original.

d) Une con una línea el punto rojo del rectángulo original con los vértices similares de los otros rectángulos.

e) Calcula, para todos los rectángulos del plano, el cociente $\frac{\text{largo}}{\text{ancho}}$. ¿Es el mismo resultado en todos los casos? ________ ¿Por qué? ________________

**Recuerda**

Una escala es la relación que existe entre un objeto real y la representación que de él se hace; por ejemplo, la relación entre un mapa y el territorio que representa.

**3** **Comenten en grupo y organizados por el profesor si están de acuerdo con la información que se presenta a continuación y comenten si puede tomarse como respuesta a la pregunta planteada al inicio de esta lección:**

Dos polígonos son *semejantes* si tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

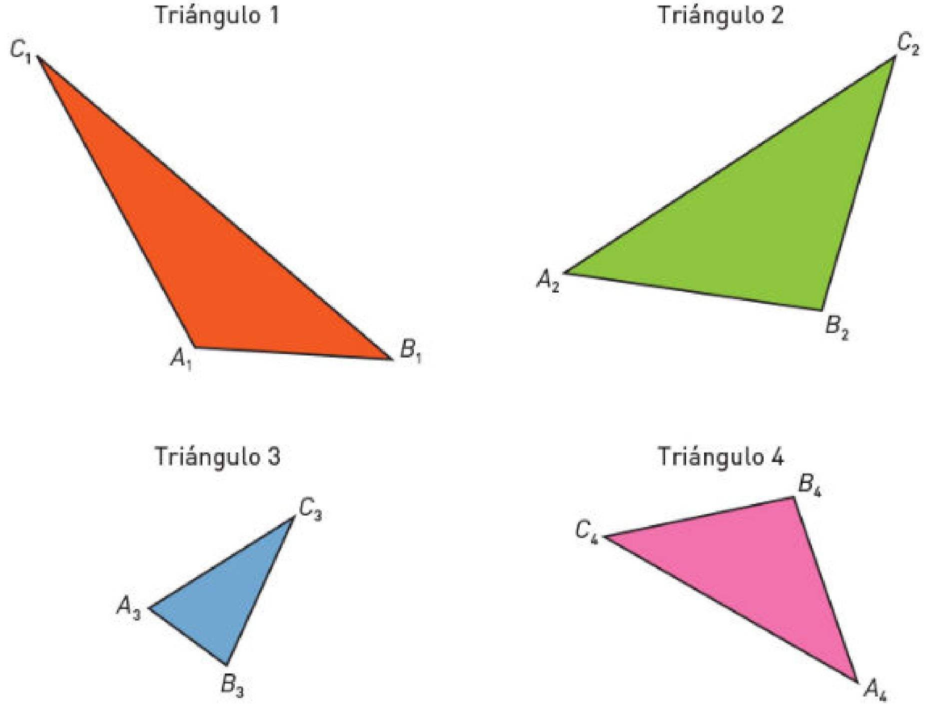
Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

## Congruencia y semejanza IV

PREGUNTA INICIAL

¿Cómo son los ángulos y los lados de un triángulo respecto a los de su ampliación o reducción?

**1** Observa los triángulos y haz lo que se pide.




a) Mide los lados y anota los resultados en las líneas.

Triángulo 1

$|\overline{A_1B_1}|$ = ________ cm  $|\overline{B_1C_1}|$ = ________ cm  $|\overline{C_1A_1}|$ = ________ cm

Triángulo 2

$|\overline{A_2B_2}|$ = ________ cm  $|\overline{B_2C_2}|$ = ________ cm  $|\overline{C_2A_2}|$ = ________ cm

Triángulo 3

$|\overline{A_3B_3}|$ = ________ cm  $|\overline{B_3C_3}|$ = ________ cm  $|\overline{C_3A_3}|$ = ________ cm

Triángulo 4

$|\overline{A_4B_4}|$ = ________ cm  $|\overline{B_4C_4}|$ = ________ cm  $|\overline{C_4A_4}|$ = ________ cm

**Recuerda**

$\overline{AB}$ indica que existe un segmento con extremos $A$ y $B$ y $|\overline{AB}|$ expresa la medida de $\overline{AB}$.





b) Compara las razones entre las longitudes de los lados del triángulo 1 y las de los demás. Resuelve las divisiones.

Triángulo 1 y triángulo 2

$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} =$ ________  $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} =$ ________  $\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_2A_2}} =$ ________

Triángulo 1 y triángulo 3

$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_3B_3}} =$ ________  $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_3C_3}} =$ ________  $\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_3A_3}} =$ ________

Triángulo 1 y triángulo 4

$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_4B_4}} =$ ________  $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_4C_4}} =$ ________  $\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_4A_4}} =$ ________

c) ¿En qué casos las medidas de los lados de los triángulos son proporcionales?

________________________________________

Dos triángulos son *semejantes* si sus lados son proporcionales.

d) Compara las medidas de los ángulos del triángulo 1 y las de las demás figuras. Usa tu compás. Escribe = o ≠ sobre la línea.

Triángulo 1 y triángulo 2

$\measuredangle A_1$ ________ $\measuredangle A_2$  $\measuredangle B_1$ ________ $\measuredangle B_2$  $\measuredangle C_1$ ________ $\measuredangle C_2$

Triángulo 1 y triángulo 3

$\measuredangle A_1$ ________ $\measuredangle A_3$  $\measuredangle B_1$ ________ $\measuredangle B_3$  $\measuredangle C_1$ ________ $\measuredangle C_3$

Triángulo 1 y triángulo 4

$\measuredangle A_1$ ________ $\measuredangle A_4$  $\measuredangle B_1$ ________ $\measuredangle B_4$  $\measuredangle C_1$ ________ $\measuredangle C_4$

e) ¿En qué casos los ángulos resultaron iguales? ________________

f) ¿Cuál de los triángulos es semejante al 1? ________________

g) ¿Sucede lo mismo con la otra pareja de triángulos semejantes? ________________

Dos triángulos son *semejantes* si tienen dos ángulos iguales.

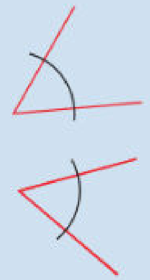
**2** Para responder la pregunta inicial, explica ante el grupo por qué dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales.

Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

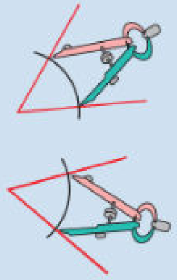
**Recuerda**

Puedes comparar las medidas de dos ángulos usando el compás de la siguiente forma:

Con centro en cada vértice, traza arcos con la misma abertura del compás.



Si las distancias entre los puntos donde los arcos cortan los lados del ángulo son iguales, entonces los ángulos miden lo mismo.



## Congruencia de triángulos I

PREGUNTA INICIAL

¿Cuántos triángulos diferentes hay cuyos lados midan 4 cm, 5 cm y 7 cm?

**1** **Reúnete con un compañero y, para cada caso, tracen en su cuaderno dos triángulos distintos que cumplan las condiciones que se indican.**

a) Que tengan un lado de 4 cm y otro de 6 cm.
b) Con un ángulo de 40° y otro de 80°.
c) Que tengan un ángulo de 45°, otro de 60° y un lado de 7 cm.
d) Con lados de 4 cm, 8 cm y 7 cm.
e) Triángulos rectángulos con un lado de 5 cm.
f) Con lados que midan 5 cm, 2 cm y 1 cm.

**2** **Formen equipos de cuatro integrantes y contesten las siguientes preguntas.**

a) ¿En qué casos sí fue posible trazar dos triángulos diferentes? ______

______

b) ¿En qué casos fue posible trazar solamente un triángulo? ______

______

c) ¿En qué casos no fue posible trazar ni un triángulo? ______

d) ¿Cuántos triángulos distintos pueden construirse que cumplan las condiciones de cada inciso de la actividad 1? Justifiquen sus respuestas. ______

______

e) Para cada inciso de la actividad 1, sugieran una condición adicional a las planteadas para que sólo se pueda trazar un triángulo. ______

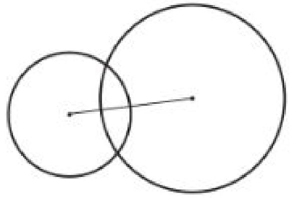
______

- Compartan sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo; además, comparen lo que obtuvieron con la siguiente información.

Si en dos triángulos los tres lados de uno son respectivamente *congruentes* con los del otro, entonces ambos triángulos también son *congruentes*.

**3** **Trabaja con un compañero. Hagan lo que se pide y contesten.**

a) Tracen dos circunferencias en su cuaderno: una de 3 cm de radio y otra de 4.5 cm, consideren que la distancia entre sus centros es 6 cm. Observen el ejemplo.





b) Sin hacer mediciones, tracen sobre las circunferencias varios triángulos con un lado de 4.5 cm y otro de 6 cm. ¿Cuántos encontraron? ______ ¿Qué método emplearon? ______

______

c) Sin medir, tracen sobre la figura triángulos con un lado de 3 cm y otro de 6 cm. ¿Cuántos encontraron? ______ ¿Qué método emplearon? ______

______

d) Tracen en la figura dos triángulos cuyos lados midan 4.5 cm, 6 cm y 3 cm e ilumínenlos. ¿Cómo los encontraron? ______

e) ¿Los ángulos de los triángulos que encontraron en el inciso d) son congruentes? ______ ¿Por qué? ______

f) En su cuaderno tracen individualmente un triángulo con las medidas que prefieran.

g) Pregunten a algún compañero qué medidas escogió para su triángulo y tracen en su cuaderno otro con las mismas medidas.

h) ¿Construyeron un triángulo congruente al de su compañero? ______

i) Si sólo conocieran las medidas de dos lados del triángulo de su compañero, ¿hubieran podido hacer un triángulo congruente? ______ ¿Por qué? ______

______

**4** **Para dar respuesta a la pregunta inicial de esta lección, en grupo y con ayuda de su profesor hagan las actividades indicadas.**

a) Analicen la información contenida en el siguiente recuadro.

Dos triángulos son *congruentes* si dos de sus lados tienen la misma longitud y el ángulo comprendido entre ellos tiene la misma medida que el original.

b) ¿Puede construirse sólo un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 5 cm y 7 cm? ______

c) Dibujen en el pizarrón el o los triángulos que justifiquen sus respuestas.

- Comenten los resultados de esta actividad y analicen lo siguiente: si las medidas de los lados de dos triángulos son iguales, ¿los ángulos también son iguales? Anoten sus conclusiones en las líneas. ______

______

______

______

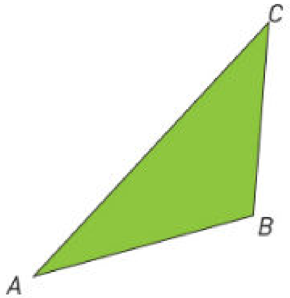
Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

## Congruencia de triángulos II

PREGUNTA INICIAL

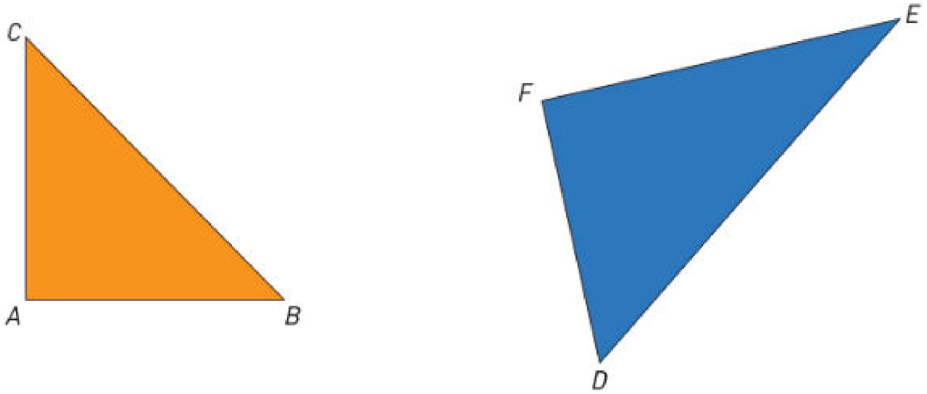
Si se divide un romboide con una diagonal, ¿se obtienen dos triángulos congruentes? ¿Por qué?

**1** Observa la siguiente figura y haz lo que se pide en tu cuaderno.




a) Traza dos triángulos congruentes al triángulo *ABC* sin hacer más mediciones que copiar dos lados y un ángulo usando regla y compás.
b) Mide los lados y ángulos del triángulo original y de los que trazaste para que compruebes si son congruentes.
c) Escribe las medidas del ángulo y de los lados que escogiste para copiar.
d) Reúnete con cuatro o cinco de tus compañeros y comparen las estrategias que siguieron para trazar los triángulos.

**2** Usa el compás para determinar qué lados y ángulos de los siguientes triángulos coinciden.




a) Escribe en el espacio siguiente las medidas que sí coinciden.

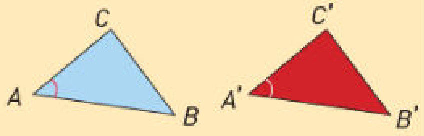
b) ¿Los triángulos son congruentes? _____ ¿Por qué? ____________________



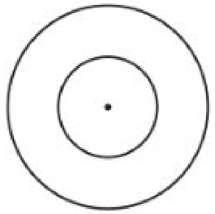


Dos triángulos son *congruentes* si tienen un ángulo igual y los lados que lo comprenden también son iguales en cada triángulo:

$\angle A = \angle A'$ $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.




**3** Dibuja en tu cuaderno dos circunferencias con el mismo centro. Una de 4 cm de radio y otra de 2 cm. Fíjate en el ejemplo.



a) Traza triángulos con lados de 2 cm y 4 cm que tengan un ángulo de 60°. Para hacerlo, sólo mide el ángulo.
b) ¿Los triángulos que trazaste son congruentes? ____________
¿Por qué? ____________________

**4** En el siguiente espacio traza un triángulo en el que sólo midas dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

a) Pregunta a un compañero qué medidas escogió para su triángulo y trázalo en tu cuaderno.
b) ¿Construiste un triángulo congruente con el de tu compañero? ________ Si no fue así, revisa tus trazos y el procedimiento que seguiste.
c) Si sólo conocieras la medida de un lado y un ángulo del triángulo de tu compañero, ¿podrías trazar un triángulo congruente? ____________ ¿Por qué? ________

- Con ayuda de tu profesor, comenta ante el grupo los resultados obtenidos en esta actividad.

**5** Para responder la pregunta inicial, tracen un romboide en su cuaderno o en una hoja y divídanlo con una línea diagonal. Ahora tienen dos triángulos. Contesten:

a) ¿Cuánto mide el ángulo obtuso de cada triángulo del romboide? ____________
b) ¿Cuánto miden los lados que forman cada ángulo obtuso? ____________
c) Apliquen los criterios de congruencia estudiados en esta lección y expliquen por qué los triángulos obtenidos son congruentes. ____________

**Recuerda**

Un *ángulo agudo* mide menos de 90°.

Un *ángulo recto* mide 90°.

Se llama *obtuso* al ángulo cuya medida es mayor que 90° y menor que 180°.

El ángulo que mide 180° se llama *llano*.

Un ángulo *completo* es aquel que mide 360°.

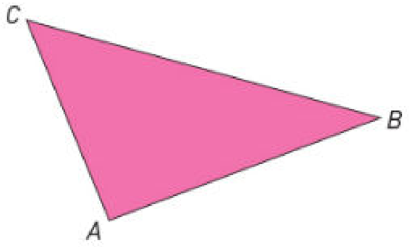
Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

## Congruencia de triángulos III

**PREGUNTA INICIAL**

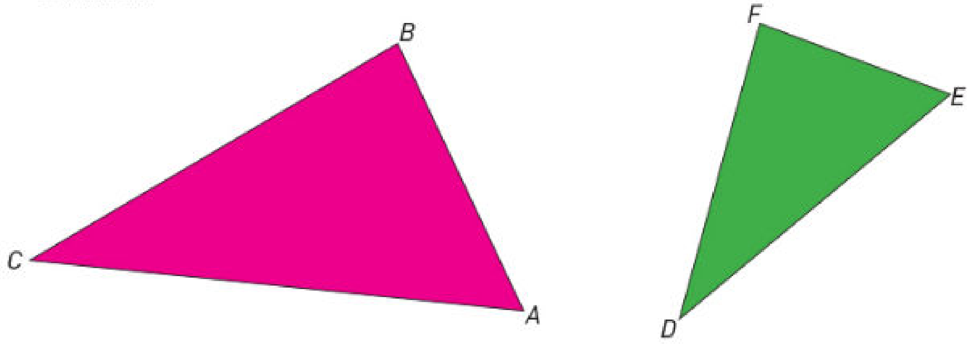
Para saber si dos triángulos son congruentes, ¿es necesario medir los tres lados y los tres ángulos de cada uno?

**1** Observa el triángulo *ABC*.




a) Traza en tu cuaderno dos triángulos congruentes al triángulo *ABC*, pero sólo copia dos ángulos y el segmento comprendido entre ellos usando regla y compás, sin hacer más mediciones.
b) Para que compruebes si los triángulos que trazaste son congruentes, mide los lados y ángulos del triángulo original.
c) Escribe las medidas de los ángulos y del lado que elegiste para copiar. ________
d) Reúnete con cuatro o cinco de tus compañeros y comparen las estrategias que siguieron para trazar los triángulos.

**2 Usa el compás para determinar qué lados y ángulos de los siguientes triángulos coinciden.**




a) Escribe en el espacio siguiente las medidas que sí coinciden.

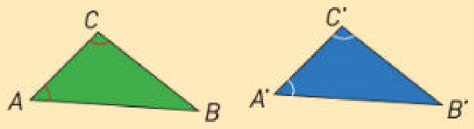
b) ¿Los triángulos son congruentes? ________ ¿Por qué? ________





Dos triángulos son *congruentes* si tienen dos ángulos respectivos iguales y el lado comprendido entre ellos también es igual:

$\angle A = \angle A'$ $\angle C = \angle C'$ $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.




**3 En el siguiente espacio traza un triángulo en el que sólo midas dos de sus ángulos y el segmento comprendido entre ellos.**

a) Pregunta a un compañero qué medidas escogió para su triángulo y trázalo en tu cuaderno.

b) ¿Construiste un triángulo congruente con el de tu compañero? ________ Si no es así, revisa tus trazos y el procedimiento que seguiste.
c) Si sólo conocieras la medida de los dos ángulos del triángulo de tu compañero, ¿podrías trazar un triángulo congruente? ________ ¿Por qué? ________

- Con ayuda de tu profesor, comenta ante el grupo los resultados obtenidos en esta actividad.

**4 Subraya las frases que completen correctamente la oración.**

Dos triángulos son congruentes si...

a) sus tres lados miden lo mismo.
b) dos lados y el ángulo comprendido entre ellos miden lo mismo.
c) sus tres ángulos tienen la misma medida.
d) dos de sus lados miden lo mismo.
e) sus ángulos adyacentes a un lado miden lo mismo.
f) dos lados adyacentes a un ángulo tienen la misma medida.
g) un lado y dos ángulos cualesquiera miden lo mismo.

**5 Elijan una de las respuestas subrayadas en la actividad anterior, la que consideren que contesta mejor la pregunta inicial de esta lección, y justifíquenla esquemáticamente en el siguiente espacio.**

**TIC**

Ingresa al sitio <www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=14932&referente=docentes>, el cual contiene una explicación, actividades y enlaces sobre la congruencia de los triángulos. Compara los conceptos del sitio con lo aprendido en esta lección, haz un resumen en tu cuaderno y léelo en clase.

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

## Semejanza de triángulos I

PREGUNTA INICIAL

Dos triángulos son distintos, pero las medidas de sus ángulos son 40°, 55° y 85°. ¿Las medidas de sus lados son proporcionales?

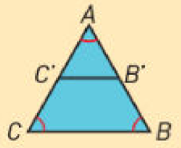
**1** **Reúnete con cuatro compañeros y hagan las actividades siguientes.**

a) Cada uno dibuje un triángulo equilátero en una hoja de papel o cartulina y recórtenlo.

b) Nombren los triángulos con los números del 1 al 5. Noten que los cinco triángulos son semejantes. ¿Por qué? ____________________

La *razón de semejanza* es el resultado del cociente entre dos lados homólogos de un par de triángulos.

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{C'C}}$$




c) Midan las longitudes de los lados de los triángulos que construyeron y escriban en la siguiente tabla cuál es la razón de semejanza entre los lados del triángulo 1 y los demás triángulos.

| | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 | Triángulo 5 |
|---|---|---|---|---|
| Razón de semejanza | | | | |

d) Tracen triángulos con las medidas que se indican en la siguiente tabla, de acuerdo con el número de triángulo que les correspondió.

| | Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 | Triángulo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Lado *a* | 2 cm | 1 cm | 3 cm | 1. 5 cm | 2.5 cm |
| Lado *b* | 6 cm | 3 cm | 9 cm | 4.5 cm | 7.5 cm |
| Lado c | 8 cm | 4 cm | 12 cm | 6 cm | 10 cm |

e) ¿Los triángulos que trazaron son semejantes? __________ ¿Por qué? __________

____________________

f) Escriban en la tabla las razones de semejanza respecto al triángulo 1.

| | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 | Triángulo 5 |
|---|---|---|---|---|
| Razón de semejanza | | | | |

**2** **Reúnanse en equipo. Hagan lo que se indica y respondan en su cuaderno.**

a) Cada miembro del equipo trace un triángulo cuyos ángulos midan $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$ y $\angle C = 80°$. Las medidas de los lados pueden variar, pero los ángulos deben ser los mencionados.

b) Revisen si los triángulos trazados cumplen las condiciones solicitadas. Después compárenlos, ¿son semejantes? ¿Por qué?





c) Midan los lados con la mayor exactitud posible. Anoten las medidas a continuación.

| Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 | Triángulo 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert\overline{AB}\rvert =$ | $\lvert\overline{AB}\rvert =$ | $\lvert\overline{AB}\rvert =$ | $\lvert\overline{AB}\rvert =$ | $\lvert\overline{AB}\rvert =$ |
| $\lvert\overline{BC}\rvert =$ | $\lvert\overline{BC}\rvert =$ | $\lvert\overline{BC}\rvert =$ | $\lvert\overline{BC}\rvert =$ | $\lvert\overline{BC}\rvert =$ |
| $\lvert\overline{CA}\rvert =$ | $\lvert\overline{CA}\rvert =$ | $\lvert\overline{CA}\rvert =$ | $\lvert\overline{CA}\rvert =$ | $\lvert\overline{CA}\rvert =$ |

d) Verifiquen que las medidas de los lados correspondientes de los cinco triángulos sean proporcionales. Tengan en cuenta que pudo haber errores de medición. Anoten las razones de semejanza respecto al triángulo 1.

| | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 | Triángulo 5 |
|---|---|---|---|---|
| Razón de semejanza | | | | |

e) Cada miembro del equipo debe trazar un triángulo que tenga dos ángulos que midan $\angle A = 60°$ y $\angle B = 45°$. Las medidas de los lados pueden variar, pero los ángulos deben ser los que se indican.

f) Recorten y comparen sus triángulos. ¿Son semejantes?

g) ¿Cuánto mide el tercer ángulo del triángulo que trazaste? Compara tu respuesta con la de tus compañeros de equipo. ¿Qué observas? ¿Por qué sucede esto?

**3** **Sigan reunidos en equipo. Cada integrante trace triángulos que tengan dos lados que midan lo que se indica; respondan aquí y tracen en su cuaderno.**

| | Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 | Triángulo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Lado *a* | 3 cm | 1 cm | 3 cm | 1.5 cm | 2.5 cm |
| Lado *b* | 6 cm | 3 cm | 9 cm | 4.5 cm | 7.5 cm |

a) Observa que los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales. Anota la razón de proporcionalidad respecto al triángulo 1.

| | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 | Triángulo 5 |
|---|---|---|---|---|
| Razón de proporcionalidad entre los lados *a* y *c* | | | | |

b) ¿Los triángulos que trazaron son semejantes? __________ Si dos triángulos son semejantes, modifiquen alguno de manera que ya no lo sean.

c) Tracen ahora otros triángulos con dos lados que midan lo que indica la tabla del inciso a), pero ahora cuiden que el ángulo que formen estos lados mida 50°.

d) Recorten y comparen los triángulos que trazaron en el inciso anterior. ¿Son semejantes?

____________________

**4** **Para responder la pregunta inicial de esta lección, tracen en su cuaderno dos triángulos semejantes por sus ángulos. Midan los lados homólogos de cada uno y calculen la razón de semejanza entre ellos para saber si son proporcionales.**

**Observa**

Si quieres conocer algunas de las relaciones que hay entre este tema, otros y la vida cotidiana, te invitamos a leer el siguiente libro de la colección Libros del Rincón: Ruiz, Concepción y Sergio de Régules, *El piropo matemático. De los números a las estrellas*, México, SEP-Lectorum, 2003.

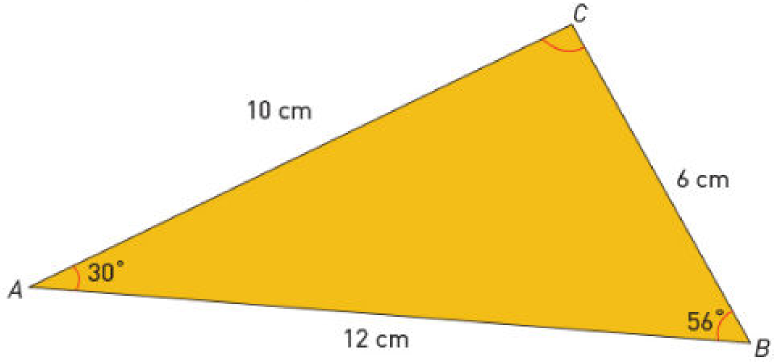
Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

## Semejanza de triángulos II

PREGUNTA INICIAL

Para saber si dos triángulos son semejantes, ¿es necesario medir los tres lados y los tres ángulos de cada uno?

**1** Formen equipos, observen el siguiente triángulo y hagan lo que se pide.




a) Tracen triángulos con las medidas que se indican en la siguiente tabla. Las que no se indican pueden elegirlas ustedes. Por ejemplo:

En el triángulo 1, el lado $\overline{AB}$ debe medir 6 cm y el ángulo $C$, 94°. Los otros lados y ángulos pueden tener cualquier otra medida.

| | $\lvert\overline{AB}\rvert$ | $\lvert\overline{BC}\rvert$ | $\lvert\overline{AC}\rvert$ | $\angle A$ | $\angle B$ | $\angle C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Triángulo 1 | 6 cm | | | | | 94° |
| Triángulo 2 | | | | 30° | 56° | |
| Triángulo 3 | 6 cm | 3 cm | | 30° | | |
| Triángulo 4 | 6 cm | | 5 cm | | | |
| Triángulo 5 | 6 cm | | 5 cm | | 56° | |
| Triángulo 6 | 6 cm | 3 cm | 5 cm | | | |

b) Comprueben en qué casos obtuvieron triángulos semejantes al primero y comparen sus resultados con los de los otros equipos.

c) Tracen en su cuaderno un triángulo semejante al triángulo de arriba. La razón de semejanza debe ser $\frac{2}{3}$.

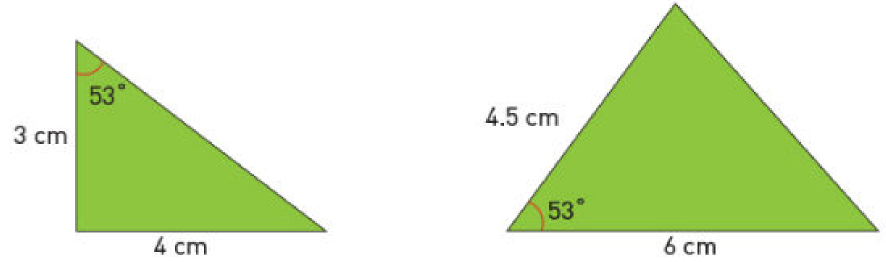
Comparen las estrategias que siguieron para trazar el triángulo de esta actividad y determinen cuáles son correctas. Anótenlas en el espacio de abajo.



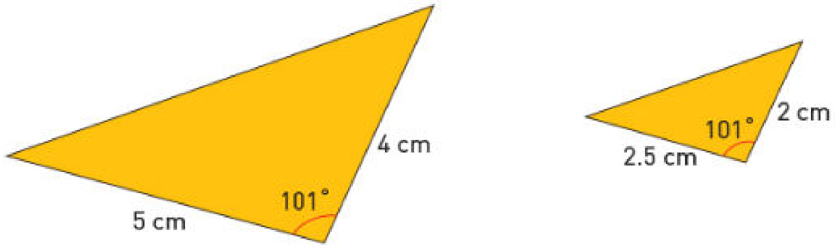


**2** Trabaja con un compañero. Expliquen en su cuaderno si cada pareja de triángulos es semejante y por qué.

a)




b)




**3** Observa las dimensiones y características de algunos triángulos y determina si son semejantes. Explica las razones en tu cuaderno.

| Triángulo 1 | Triángulo 2 | ¿Son semejantes? |
|---|---|---|
| 40°, 50° | 40°, 90° | |
| 60°, 60°, 60° | 8 cm, 8 cm, 8 cm | |
| isósceles, el ángulo desigual mide 45° | isósceles, el ángulo desigual mide 45° | |

**4** Subraya los enunciados que completan correctamente la frase.

Dos triángulos son semejantes si...

a) las medidas de sus tres lados son proporcionales.
b) las medidas de dos pares de sus ángulos correspondientes son iguales.
c) las medidas de dos de sus lados correspondientes son proporcionales.
d) las medidas de un par de ángulos correspondientes son iguales.
e) las medidas de sus lados son iguales.

**5** Analicen en grupo las respuestas de la actividad anterior; después, comprueben que la siguiente información conteste la pregunta inicial y comenten sus conclusiones.

Dos triángulos son *semejantes* si tienen dos ángulos iguales.

**TIC**

Ingresa al sitio <recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/semejanza/swf/criterios.swf>. Analiza los criterios de semejanza en los triángulos; después, compártelos con tus compañeros y comenten en qué situaciones de la vida cotidiana encuentran casos parecidos.

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

## Las escaleras

Observa las figuras y responde.

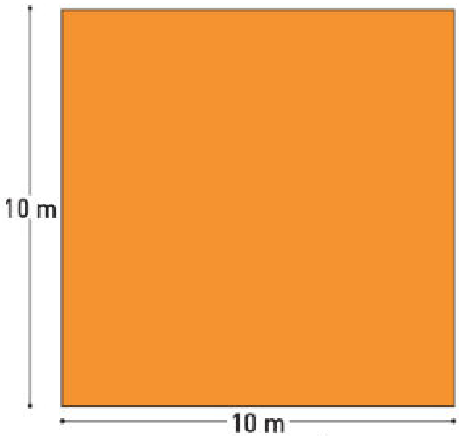



Figura 1

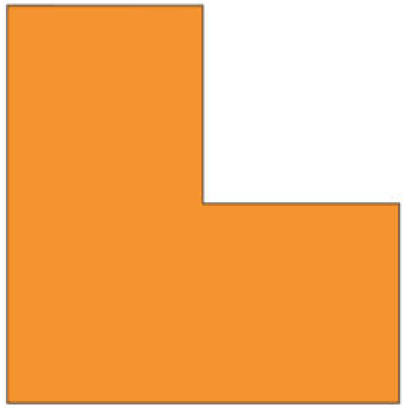


Figura 2

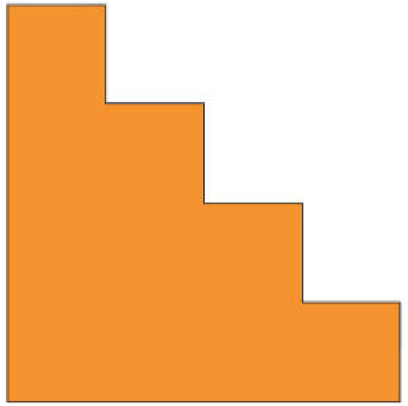


Figura 3

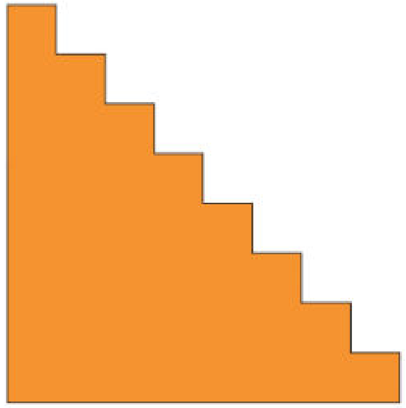


Figura 4

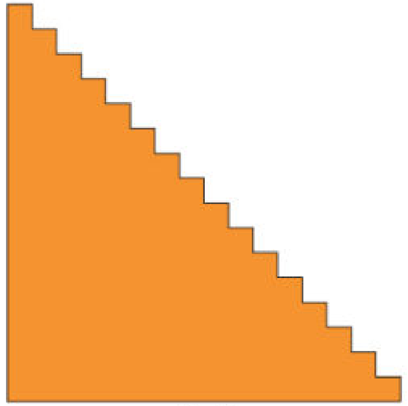


Fig. 5

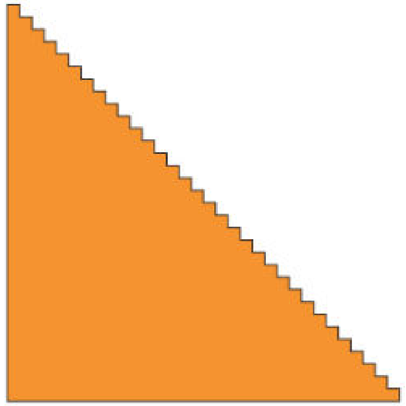
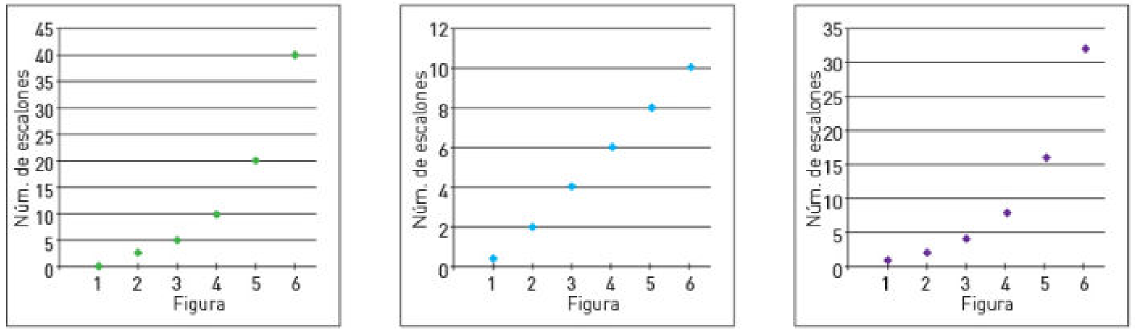


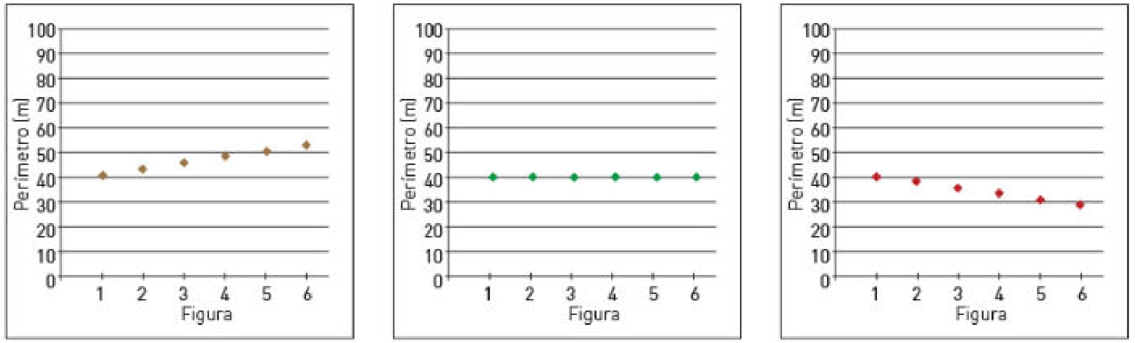
Fig. 6



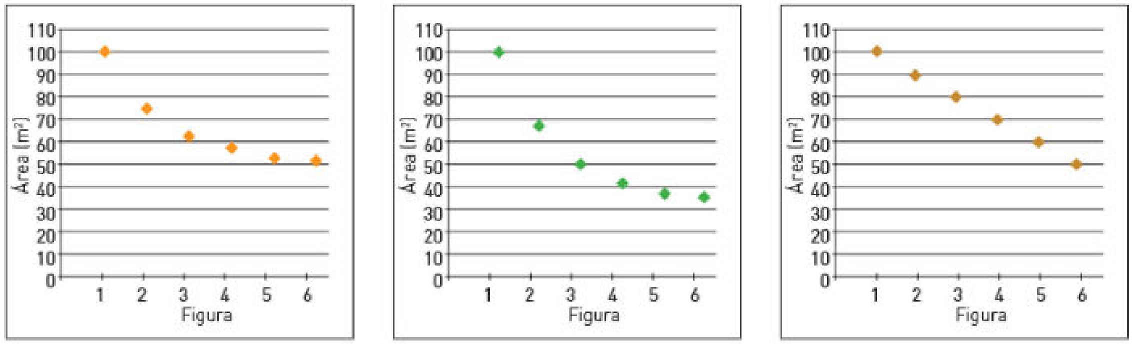
a) ¿Cómo cambia el número de escalones? ¿Cuál de las siguientes gráficas representa ese cambio?




b) ¿Cómo cambia el perímetro de la figura? ¿Cuál de las siguientes gráficas representa ese cambio?




c) ¿Cómo cambia el área de la figura? ¿Cuál de las siguientes gráficas representa ese cambio?




**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

Reúnete en equipo para examinar las gráficas. Comenten qué características les permiten distinguir la que corresponde en cada caso.

## Relaciones de proporcionalidad I

PREGUNTA INICIAL

¿Cómo es la gráfica de una relación directamente proporcional?

**Observa**

Principalmente se usan dos tipos de escalas numéricas para los mapas: una en forma de fracción, representada por la siguiente razón: medida en el mapa/ longitud real; la otra forma es en relación con la unidad de medida, por ejemplo: 1:10 000 indica que cada unidad en el mapa equivale a 10 000 en la realidad.

**1** Trabaja con un compañero. Consideren la situación y hagan lo que se indica.

a) Javier está calculando distancias con ayuda de un mapa. Ha encontrado algunas y las registró en la siguiente tabla, pero le faltan datos. Complétenlos.

| Distancia en el mapa (cm) | 4 | 7.5 | 8 | | 14 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia real (km) | 10 | 18.75 | | 25 | | 40 |

**2** Analicen la información de la tabla y contesten las preguntas.

a) Si la distancia en el mapa disminuye a la mitad, ¿la distancia real correspondiente también es la mitad? ________ ¿Por qué? ________________________________

b) Si la distancia en el mapa aumenta al doble, ¿la distancia real correspondiente también es el doble? ________ ¿Por qué? ________________________________

c) Si la distancia real aumenta al triple, ¿la distancia en el mapa que corresponde también es el triple? ________ ¿Por qué? ________________________________

d) Si la distancia en el mapa aumenta cinco veces, ¿la distancia real que corresponde también aumenta en esa proporción? ______ ¿Por qué? ______________

e) Las distancias en el mapa y las reales se relacionan de manera directamente proporcional. ¿Por qué? ________________________________

f) ¿Qué distancia real corresponde a 1 cm en el mapa? ________________ ¿Cómo lo saben? ________________________________

g) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ________________

h) ¿Cómo pueden calcular la distancia real que corresponde a determinada distancia en el mapa? Explíquenlo en su cuaderno.

**3** Desarrollen una expresión que relacione las distancias del mapa en centímetros y las reales en kilómetros.

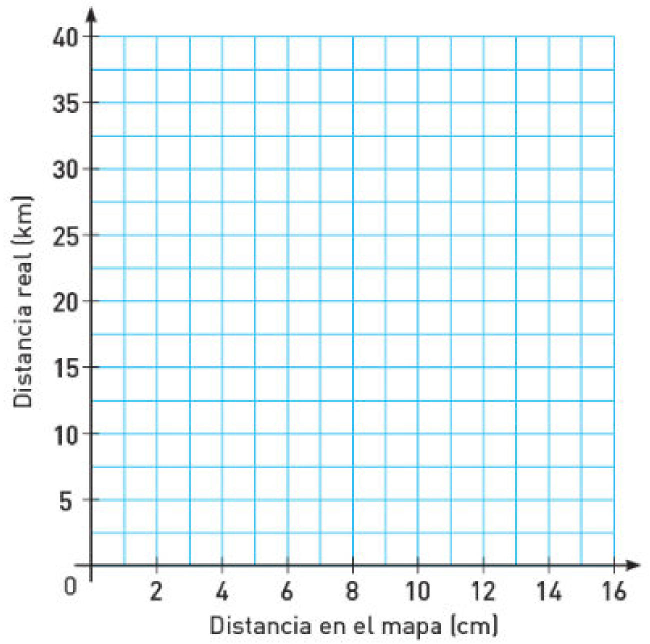
a) Escriban la expresión que encontraron: ________________________________

b) ¿Qué relación hay entre esta expresión y la constante de proporcionalidad? ________





**4** Localicen en el siguiente plano cartesiano los puntos que anotó Javier en la tabla.




a) Verifiquen que los puntos graficados se encuentran en una línea recta. Si no es así, revisen sus procedimientos.

b) ¿Cuál es la ordenada que corresponde a la abscisa 0? ________________

**5** Analiza las siguientes situaciones y subraya la que se relacione con la gráfica anterior. En el recuadro de abajo explica tu justificación.

a) Un automóvil viaja a una velocidad constante de 25 km por hora.
b) Un tinaco se vacía a razón de 25 litros por minuto.

**6** Con ayuda del profesor, discutan por qué la gráfica de proporcionalidad directa siempre es una recta en aumento o descenso. Sugieran varias situaciones en las que los datos se comporten de esta manera. Además, comenten de qué modo sirve la siguiente información para contestar la pregunta inicial de esta lección.

Dos magnitudes son *directamente proporcionales* si al incrementarse o disminuir una de ellas, la otra lo hace en la misma proporción.

**TIC**

Ingresa al sitio <bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v01/u01t08s01.html>. En él podrás analizar una situación en la que se presenta la proporcionalidad directa. Reúnete con un compañero y juntos expliquen en su cuaderno el método que se utiliza.

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

## Relaciones de proporcionalidad II

**PREGUNTA INICIAL**

¿De qué manera afecta la constante de proporcionalidad a la gráfica correspondiente?

**1** **Analiza la siguiente situación y efectúa lo que se pide.**

Un señor fue al mercado a comprar naranjas, bisteces, uvas y huevos. La tabla contiene el precio por kilogramo de cada producto.

| Producto | Naranjas | Bisteces | Uvas | Huevos |
|---|---|---|---|---|
| Precio por kilogramo ($) | 8 | 70 | 45 | 12 |

a) Llama $x$ al número de kilogramos de cada producto y $y$ al costo que se paga. Escribe una expresión que permita calcular cuánto se paga por cada producto de acuerdo con el número de kilogramos comprados. Analiza el ejemplo.

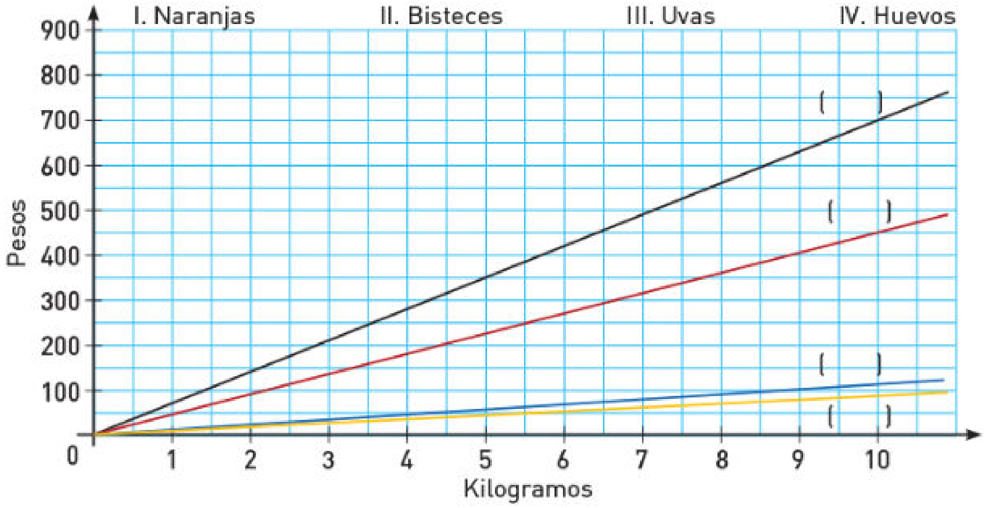
| Producto | Naranjas | Bisteces | Uvas | Huevos |
|---|---|---|---|---|
| Expresión | $y = 8x$ | | | |

b) ¿Las expresiones que anotaste corresponden a variaciones directamente proporcionales? ________ ¿Por qué? ______________________

c) Escribe cuál es la constante de proporcionalidad en cada caso.

Naranjas: ________ Bisteces: ________ Uvas: ________ Huevos: ________

d) Observa las gráficas y escribe en el paréntesis el número romano que corresponda.




e) ¿Cómo distinguiste cada gráfica? ______________________





f) Grafica en tu cuaderno el precio de los bisteces si aumentó $5.00 por kilogramo.

g) Grafica en tu cuaderno el precio de un producto que es de $30.00 por kilogramo.

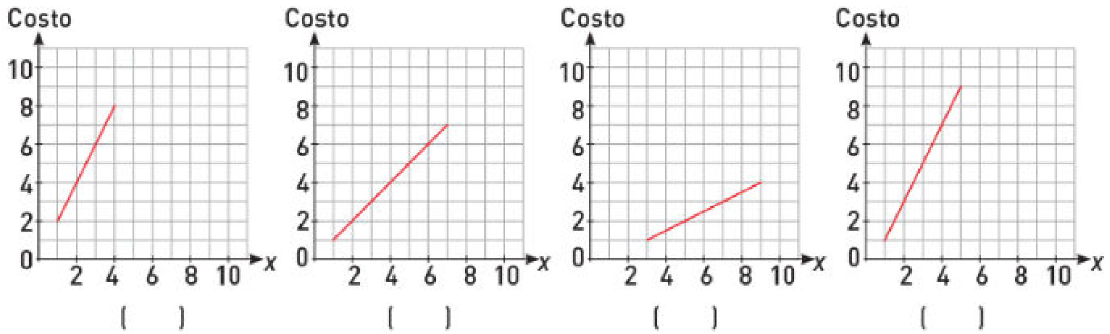
- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y justifiquen por qué eligieron cada gráfica en el inciso d).

En una **función** de la forma $y = mx$ podemos identificar que:
$y$ es una *variable* que depende del valor de $x$,
$x$ es una *variable independiente*,
$m$ es un valor *constante* (constante de proporcionalidad).

**2** **Lee con atención cada situación y relaciónala con su respectiva gráfica.**

a) Escribe debajo de las gráficas el número que corresponda a cada situación.

I. En una tienda venden dulces que valen $1.00 cada uno.
II. En la dulcería venden las paletas a $2.00.
III. Antonio gana $2.00 por cada kilogramo de dulces que vende, menos el costo de la bolsa, que es $1.00.
IV. En la tienda venden dos paletas por $1.00, pero el vendedor siempre te regala una.




b) Anota en el paréntesis el número romano de la situación que corresponde a cada tabla.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 5 | 9 |

( )

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 6 | 6 |

( )

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 7 | 3 |

( )

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |

( )

c) Explica en tu cuaderno cuáles de las situaciones anteriores son de variación proporcional directa y por qué.

**3** **Formen equipos de cuatro integrantes para que analicen y expliquen ante el grupo, sin hacer cálculos, la diferencia entre las gráficas de $y = 3x$ y $y = \frac{2}{3}x$.**

**4** **Para responder la pregunta inicial de esta lección, comenten en grupo y con su profesor por qué una gráfica se hace más vertical conforme aumenta la constante de proporcionalidad y más horizontal cuando disminuye la constante.**

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

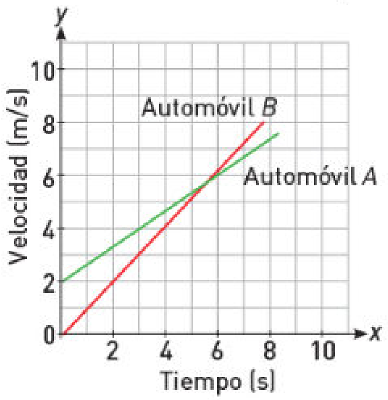
## Relaciones de proporcionalidad III

PREGUNTA INICIAL

¿Todas las gráficas que son líneas rectas representan situaciones de variación proporcional directa?

La velocidad del primer automóvil se empezó a registrar desde el momento en el que arrancó, mientras que la velocidad del segundo cuando ya estaba en movimiento.

**1** Observa la gráfica, analiza las situaciones y contesta las siguientes preguntas.




a) ¿Cuál es el automóvil del que se registró la velocidad cuando ya estaba en movimiento?

_______________

b) De continuar con la misma tendencia, ¿qué velocidad llevará el automóvil *A* a los 9 s?

_______________

c) De continuar con la misma tendencia, ¿qué velocidad llevará el automóvil *B* a los 10 s?

_______________

d) Represento con *v* la velocidad, con *t* el tiempo y escribe una expresión que relacione ambas variables.

Automóvil *A*: __________ Automóvil *B*: __________

e) ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad para cada automóvil?

Automóvil *A*: __________ Automóvil *B*: __________

f) En equipos, expliquen si en estos casos se presenta una relación de variación proporcional directa y comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Obtengan conclusiones y anótenlas en el siguiente espacio.





**2** Lee los planes mensuales que ofrecen algunas compañías de telefonía celular.

**Prontocel**
Se cobran $50.00 por los primeros 20 minutos y después $1.00 por minuto.

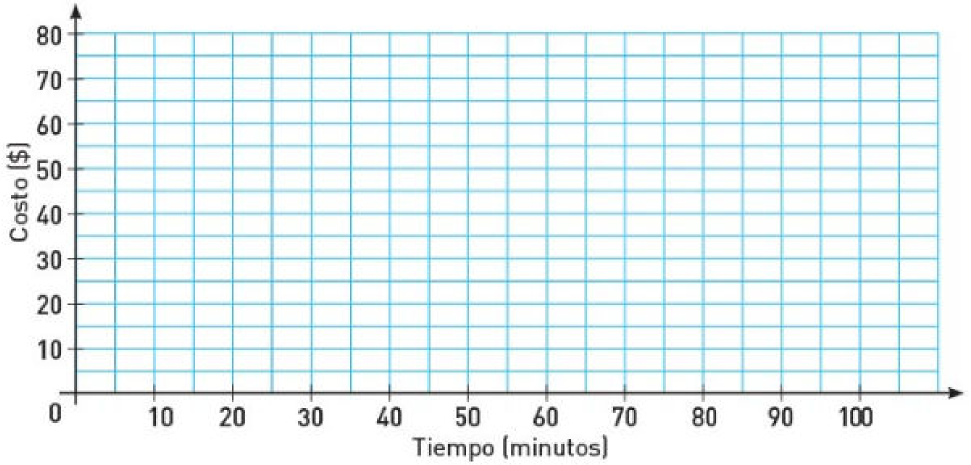
**Celutodo**
Se cobran $4.00 por minuto.

**Hablacel**
Se cobran $35.00 por los primeros 50 minutos y después $2.00 por minuto.

**Celufans**
Se cobran $3.00 por minuto los primeros 20 minutos y después $2.00 por minuto.

En todos los casos se cobran fracciones de minuto. Por ejemplo, si se habla por 30 segundos, se cobra la mitad del costo de un minuto, o si se habla durante 2 minutos y 45 segundos, se cobran 2 minutos más tres cuartos del costo de un minuto.

a) En el siguiente plano cartesiano elabora las gráficas de la relación minutos-costo de cada compañía. Utiliza distintos colores.




b) ¿En qué plan se presenta una variación directamente proporcional? _______________

c) ¿En qué plan se presenta una variación directamente proporcional antes de los 20 minutos? _______________

d) ¿Qué plan es siempre más barato que el ofrecido por Celutodo? _______________

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y determinen qué características de las gráficas les permitieron contestar las preguntas.

**3** Para responder a la pregunta inicial de esta lección, propongan dos situaciones cuyas gráficas sean líneas rectas, pero sólo una de proporcionalidad directa. Expónganlas ante el grupo y expliquen la diferencia entre ellas.

**TIC**

En el sitio <recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasA/4quincena3/4quincena3_contenidos_1a.htm> se encuentra un recurso interactivo muy sencillo acerca de la proporcionalidad. Visítalo, analiza los procedimientos que ahí sugieren y comenta con el grupo tu experiencia.

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

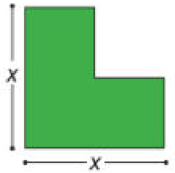
## Funciones cuadráticas I

PREGUNTA INICIAL

¿Qué situaciones puede representar la ecuación $x^2 - 100 = 0$?

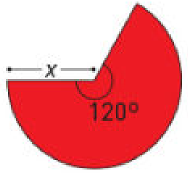
**1** Observa las figuras y completa las tablas. Considera $\pi = 3.14$.

a) Figura 1



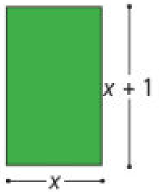

| $x$ (cm) | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área (cm²) | | | | | | | | |

b) Figura 2




| $x$ (cm) | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área (cm²) | | | | | | | | |

c) Figura 3




| $x$ (cm) | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área (cm²) | | | | | | | | |

d) Escribe una fórmula para calcular el área de cada figura.

Figura 1: ______ Figura 2: ______ Figura 3: ______

- Compara tus fórmulas con las de tus compañeros de grupo y escojan las correctas. Tengan en cuenta que la misma fórmula puede estar escrita de diferentes maneras. Después comenten qué tienen en común y en qué se diferencian.

**Recuerda**

Las fórmulas para calcular el área de algunas figuras son las siguientes:

Cuadrado: $A = l^2$

Rectángulo: $A = b \times h$

Círculo: $A = \pi r^2$

Triángulo $A = \frac{b \times h}{2}$

En todos los casos el resultado se expresa en unidades cuadradas.

**2** Trabaja con un compañero para hacer esta actividad y las actividades 3 y 4.

a) ¿En qué figura el área es mayor cuando $x = 1$? ______

b) ¿Qué área se incrementa con mayor rapidez conforme aumenta $x$? ______

¿Por qué? ______

c) ¿Qué área se incrementa con menor rapidez conforme aumenta $x$? ______

¿Por qué? ______





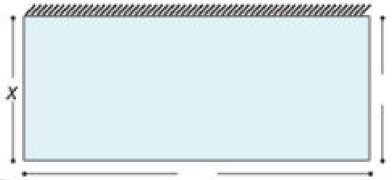
**3** Lean la información del recuadro y contesten la pregunta.

Muchas magnitudes dependen de otras; por ejemplo, el área de un círculo depende de la longitud de su radio.
Una relación entre dos magnitudes se puede representar, entre otras maneras, con una tabla o con una expresión algebraica.

a) ¿De qué depende el área que calcularon en las figuras de la actividad 1? ______

**4** Resuelvan el siguiente problema.

Mariana quiere hacer un gallinero rectangular. Uno de los lados será un muro y los otros tres se harán con tela de alambre de 40 m de largo, como se muestra en la figura.




a) Anoten, utilizando la letra $x$, las medidas que faltan en la figura.

b) Completen la tabla. Guíense por las áreas anotadas según el valor de $x$.

| $x$ (m) | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área del gallinero (m²) | | | | | | | | |

c) Escriban una expresión algebraica que relacione el área del gallinero y el valor de $x$:

______

d) ¿Para qué valor de $x$ se obtiene el área mayor? Anótenlo y expliquen en el espacio siguiente cómo lo obtuvieron.

- Formen equipo con otras parejas. Comparen las expresiones y los procedimientos obtenidos en toda la actividad y expongan sus resultados ante el grupo. Determinen cuáles son los procedimientos más sencillos.

**5** Para responder la pregunta inicial de esta lección, propongan varias aplicaciones para la ecuación $x^2 - 100 = 0$; por ejemplo, el área de un cuadrado menos una cantidad de dicha área. Justifiquen sus propuestas algebraicas y tabulen gráficamente en el pizarrón.

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

## Funciones cuadráticas II

PREGUNTA INICIAL

¿Un cuerpo en caída libre lleva la misma velocidad en cualquier instante?

**1** Reúnete con un compañero, lean la situación y contesten.

a) Para una práctica universitaria se deja caer un cuerpo desde 40 m de altura. En la tabla se registran las alturas a las que se encuentra el cuerpo en diferentes momentos.

| Tiempo (s) | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 2.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Altura del cuerpo (m) | 40 | 38.775 | 35.1 | 28.975 | 20.4 | 9.375 | 6.876 |

b) Subrayen la expresión con la cual se obtiene la altura ($h$) del cuerpo en metros en determinado tiempo ($t$) en segundos.

$h = 4.9t^2$ $h = 40 - 4.9t^2$ $h = 40 + 4.9t^2$ $h = 4.9t$

- Reúnanse con otras parejas, revisen su respuesta a la pregunta anterior y comenten sus estrategias para escoger la fórmula correcta.

**Observa**

De seguro te interesa entender muchos de los fenómenos físicos que suceden a tu alrededor, como la velocidad a la que cae un paracaidista que se lanza desde un avión en pleno vuelo o por qué los cuerpos caen en lugar de flotar, etcétera. Si es así, lee el siguiente libro que se encuentra en tu biblioteca escolar: Lewin, Walter y Warren Goldstein, *Por amor a la física*, México, Debate, 2013.

**2** Analicen la siguiente situación y respondan la pregunta.

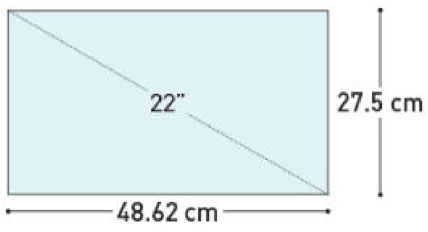
Sugieran una ecuación que represente la caída de un objeto desde 20 metros de altura si parte del reposo: a los 0.5 s desciende 1.225 m; al primer segundo lleva 4.9 m de descenso; y a los 1.5 s está a 8.975 m sobre el suelo. ____________________

**3** Forma equipo con tres o cuatro compañeros y resuelvan lo siguiente.

El tamaño de las pantallas planas de televisor se indica en pulgadas y se refiere a la longitud de una de sus diagonales. Una fábrica elabora dichas pantallas en formato ancho. En la tabla se ven las dimensiones de las pantallas de 22" y 32".

a) Completen la tabla. Consideren que las pantallas tienen forma de rectángulos semejantes.

| Diagonal (pulgadas) | Largo (cm) | Ancho (cm) | Área (cm²) |
|---|---|---|---|
| 22 | 48.62 | 27.50 | |
| 32 | 70.72 | 40.00 | |
| 37 | | | |
| 40 | | | |
| 42 | | | |
| 46 | | | |
| 50 | | | |








b) Comenten con el grupo qué estrategias siguieron para calcular las dimensiones de cada pantalla y determinen cuáles son correctas. Anoten las conclusiones en su cuaderno.

c) Escriban una expresión algebraica con la que se calcule cuántos centímetros de largo mide una pantalla a partir de la longitud de su diagonal (expresada en pulgadas). Hagan lo mismo para el ancho.

Largo: ____________ Ancho: ____________

d) Escriban una expresión algebraica con la que se calcule cuántos centímetros cuadrados mide el área de una pantalla a partir de la longitud de su diagonal en pulgadas.

Área: ____________

- Comprueben que la expresión que anotaron sea la correcta; para ello, calculen el área de cada pantalla de la tabla del inciso a).

**4** Consideren la situación en equipos.

En un supermercado hicieron una encuesta sobre el precio de un producto y los resultados fueron los siguientes.

Si el precio del artículo es de $1.00, se venden aproximadamente 500 unidades diarias. Por cada peso que aumente al precio, se venderían 20 unidades menos.

a) Completen la tabla.

| Precio ($) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Artículos vendidos | 500 | 480 | | | | |
| Total obtenido por la venta ($) | 500 | 960 | | | | |

b) Escriban una expresión algebraica para calcular el dinero total obtenido a partir del precio del artículo: ____________________

- Comparen su expresión con las de sus compañeros de grupo, determinen cuáles son las correctas y comenten cómo las obtuvieron.

**5** Contesten las siguientes preguntas. Para hacerlo, usen la expresión que formularon en la actividad anterior.

a) ¿A qué precio conviene vender el artículo para obtener la mayor utilidad? ____________

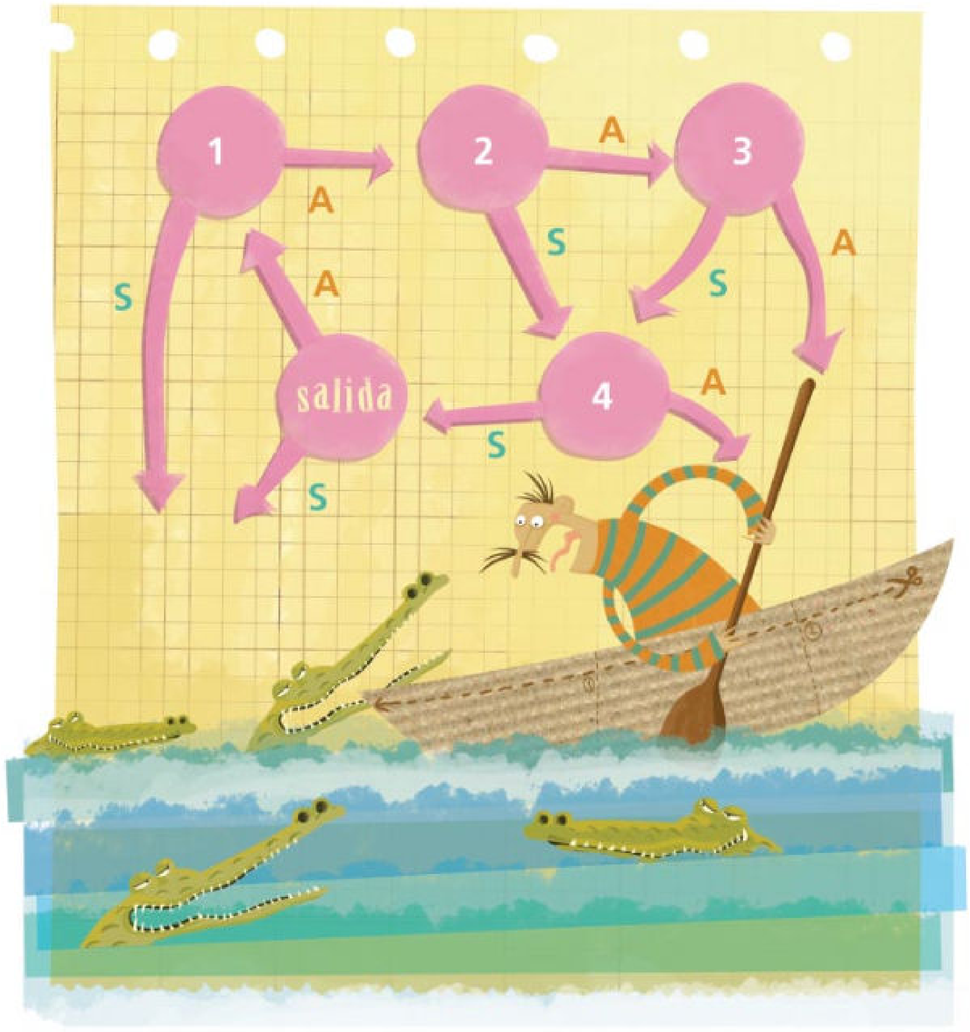
b) ¿A qué precio no se vendería ningún artículo? ____________

**6** Para resolver la pregunta inicial discutan en grupo, y con ayuda de su profesor, por qué un cuerpo en caída libre adquiere mayor velocidad a medida que se acerca al piso. Apóyense en expresiones algebraicas, tablas y gráficas para justificar sus resultados.

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

## ¿Pescador o pescado?

Reúnete con un compañero para jugar de la siguiente manera. Necesitan una moneda y dos objetos que hagan las veces de fichas.




**Reglas**

1. Coloquen sus fichas en el círculo "Salida". Sorteen quién será el primero en jugar.
2. Por turnos, lancen una moneda.
3. Si cae águila, el jugador deberá desplazar su ficha al siguiente círculo en la dirección A. Si cae sol, deberá desplazarla al siguiente círculo en la dirección S.
4. Los jugadores tendrán el derecho de ceder el turno a su contrario una sola vez en el juego diciendo *paso*. No pueden utilizar este recurso dos veces en la misma ronda.
5. Un jugador gana cuando llega a la lancha o cuando su contrario cae en los cocodrilos.



**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

Contesta las siguientes preguntas para que mejores tus estrategias en el juego.

a) ¿Qué porcentaje de probabilidad existe de caer en los cocodrilos en el primer tiro? ¿Por qué? ______

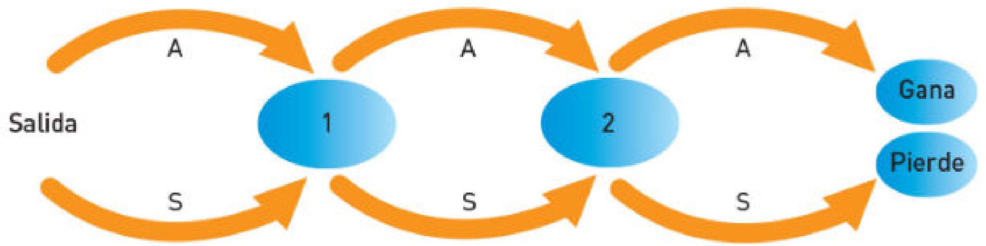
b) Si ambos jugadores están en el círculo de "Salida" y te corresponde tirar primero, ¿te conviene ceder tu turno como estrategia de juego? ______ ¿Por qué? ______

c) Rodrigo y Verónica están jugando. Es el turno de Rodrigo, y él ha seguido este camino: salida–1–2–3. Verónica dice que Rodrigo tiene pocas probabilidades de ganar en la siguiente jugada porque ya le han tocado tres águilas y necesita otra.

¿Piensas que Verónica tiene razón? ______ ¿Por qué? ______

d) Si en el caso anterior Verónica se encontrara en el círculo 3, ¿le convendría a Rodrigo ceder el turno? ______ ¿Por qué? ______

El siguiente juego tiene las mismas reglas que el anterior, con la restricción de que únicamente se permite avanzar hacia la derecha y los dos jugadores deben terminar el juego. Puede suceder que los dos ganen o los dos pierdan o que sólo uno gane.




a) ¿Te conviene ceder el turno en alguna situación de este juego? ______
¿Por qué? ______

b) ¿Qué porcentaje de probabilidad tienes de ganar? ______ ¿Por qué? ______

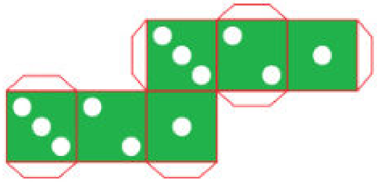
## Escala de probabilidad

PREGUNTA INICIAL

¿Qué probabilidad hay de obtener 7 al lanzar dos dados al mismo tiempo?

**1 Analiza la siguiente situación y contesta en tu cuaderno.**

Alicia y Apolo juegan con un dado que construyeron basándose en el desarrollo de la derecha.



a) ¿Qué números pueden salir al lanzar el dado?
b) ¿Cuántas posibilidades hay de que caiga 1?
c) ¿Cuántas de que caiga 2?
d) ¿Y de que caiga 3?
e) Si el dado se lanzara 300 veces, ¿cuántas veces piensas que caerá 1? ¿Por qué?
f) Si se lanzara 600 veces, ¿en cuántas caería 2? ¿Por qué?
g) Si se lanzara 900 veces, ¿en cuántas caería 3? ¿Por qué?
h) Si el dado se lanzara muchas veces, ¿en qué fracción de ellas crees que caería 1?
i) ¿La fracción anterior es la probabilidad de que caiga 1? ¿Por qué?

- Comenta con tus compañeros las respuestas a las preguntas anteriores y determinen cuáles son las correctas.

**2 Considera el dado de la actividad anterior y realiza las siguientes actividades. Las preguntas respóndelas en tu cuaderno.**

a) Completa la tabla. Si tiras el dado una sola vez, ¿qué probabilidad tienes de obtener los siguientes eventos?

| Evento | Número de resultados favorables | Probabilidad (con fracción) | Probabilidad (con número decimal) |
|---|---|---|---|
| Número menor que 3 | | | |
| Número par | | | |
| Número impar | | | |
| Número 5 | | | |
| Número menor que 1 | | | |
| Número menor que 4 | | | |
| Número mayor que 0 | | | |

b) ¿Cómo se calcula la probabilidad de un evento?
c) ¿Qué probabilidad tiene un evento que sucederá con seguridad? ¿Por qué?
d) ¿Qué probabilidad tiene un evento imposible? ¿Por qué?
e) ¿La probabilidad de un evento puede ser 86? ¿Por qué?
f) Si la probabilidad de un evento se expresa con una fracción o con un número decimal, ¿entre qué números está dicha probabilidad?





- Compara con tus compañeros los procedimientos y las respuestas que obtuviste.

**3 Analiza la siguiente situación y contesta las preguntas en tu cuaderno.**

De una bolsa con canicas rojas, verdes y azules se extrajeron 200 y los resultados fueron los siguientes:

Rojas: 40 Verdes: 58 Azules: 102

a) Del total de canicas extraídas, ¿qué porcentaje fue de color rojo? ¿A qué número decimal corresponde este porcentaje? ¿Dicho porcentaje es la probabilidad de obtener una canica roja? ¿Por qué?
b) ¿Qué porcentaje de canicas extraídas fue de color verde? ¿Este porcentaje expresa la probabilidad de obtener una canica verde? ¿Por qué?
c) ¿Qué porcentaje de canicas extraídas fue de color azul? ¿Este porcentaje expresa la probabilidad de obtener una canica azul? ¿Por qué?

- Compara con tus compañeros los procedimientos y respuestas que obtuviste.

d) ¿Cuánto es el resultado de sumar las tres probabilidades calculadas? Exprésalo en fracción, decimal y porcentaje.

**4 Ahora analiza los siguientes casos de la bolsa con canicas, completa la tabla y contesta las preguntas en tu cuaderno.**

a) Completa la tabla. Si tiras el dado una sola vez, qué probabilidad tienes de obtener lo que indica la siguiente tabla.

| Evento | Probabilidad (con porcentaje) | Probabilidad (con número decimal) |
|---|---|---|
| Una canica azul o verde | | |
| Una canica no roja | | |
| Una canica amarilla | | |
| Una canica blanca | | |
| Un número mayor que 0 | | |

b) ¿Cómo se calcula la probabilidad de un evento?
c) ¿Qué probabilidad tiene un evento que sucederá con seguridad? ¿Por qué?
d) ¿Qué probabilidad tiene un evento imposible? ¿Por qué?

**5 Para contestar la pregunta inicial de esta lección, desarrollen en grupo, con ayuda del profesor y en el pizarrón, un procedimiento numérico y esquemático del problema; consideren que el número de casos posibles es 36. Escriban los datos y el resultado en el espacio siguiente.**

TIC

Ingresa al sitio <bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsm01g01v02/u01t09s01.html>, el cual presenta una serie de nociones sobre la probabilidad que te serán de mucha utilidad para comprender mejor esta lección. Comparte tu aprendizaje con tus compañeros de grupo.

Conocimiento de la escala de probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

## Eventos independientes I

PREGUNTA INICIAL

¿El resultado de un sorteo de lotería influye en el resultado del sorteo siguiente? ¿Por qué?

**1** Reúnete con dos compañeros para jugar a la lotería numérica.

Necesitan un dado que pueden armar con el desarrollo de la actividad 1 de la lección anterior. También pueden pegar etiquetas a un dado común. Además, elaboren estos tableros en cartulina o papel.

| | | |
|---|---|---|
| 132 | 111 | 121 |
| 321 | 222 | 122 |
| 312 | 333 | 123 |

Para iniciar el juego, sorteen los tableros entre los integrantes del equipo. El dado se lanza tres veces para formar números de tres cifras. Por ejemplo, si en el primer lanzamiento el dado marca 1, 2 en el segundo y 1 en el tercero, se formará el número 121.

Quien tenga ese número en su tablero, debe marcarlo con una semilla o cualquier objeto pequeño. Si el número se repite en otra tirada, puede marcarlo dos veces.

Gana quien ponga primero tres fichas en su tablero.

Si el número de estudiantes en tu grupo no es divisible entre tres, pueden formar uno o dos equipos de cuatro alumnos y repetir uno de los tableros anteriores.

**2** Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Consideras que los tres tableros tienen la misma probabilidad de ganar? ________

¿Por qué? ______________________________________________

______________________________________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento del dado salga 1? ________

c) Si salió 1 en el primer lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de que en el segundo salga de nuevo 1? ______________________________

d) Si salió 1 en el primer lanzamiento y 1 en el segundo, ¿cuál es la probabilidad de que salga 1 en el tercero? ______________________________

e) ¿En cada lanzamiento importa lo que se haya obtenido en los anteriores? ________

______________________________________________

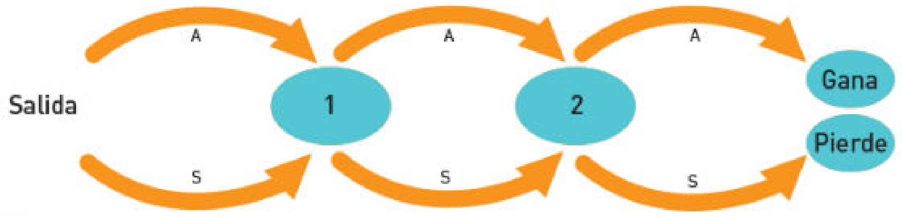




**3** Jueguen cinco veces a la lotería numérica y registren qué tablero gana en cada ocasión.

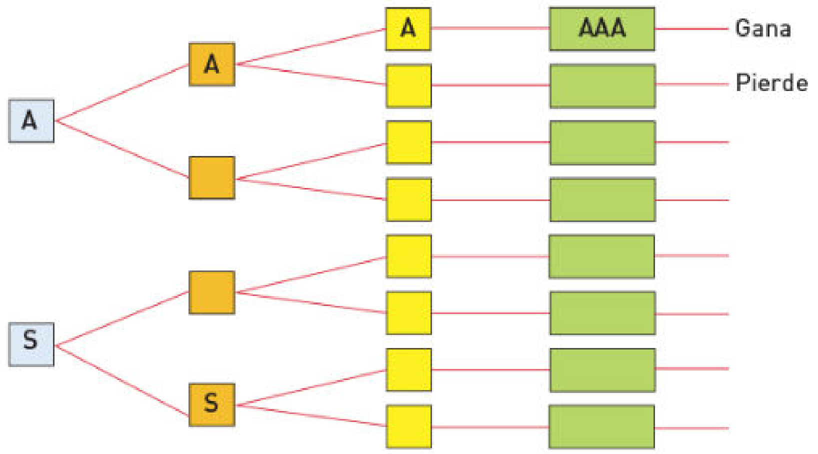
Si están en un equipo de cuatro integrantes y un tablero gana dos veces, sólo cuéntenlo una vez. Escriban los resultados de todo el grupo en el pizarrón. Después contesten lo siguiente en su cuaderno.

a) ¿Qué tablero ganó más veces?
b) Revisen sus respuestas a la actividad anterior y contrástenlas con los resultados que obtuvieron en el juego. Redacten nuevas conclusiones y compárenlas con las de todo el grupo.
c) ¿Hay algunos números de tres cifras, como 123 o 111, cuyas probabilidades de salir sean menores que las de otros? ¿Por qué?




**4** Recuerda el juego de la página 57. Completa el diagrama con las posibilidades que se pueden dar en el juego. Después contesten en su cuaderno.

a) ¿Cuántas posibilidades hay en total?
b) ¿En cuántos casos se gana y en cuántos se pierde?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador llegue al sitio 2 en el dibujo de arriba? ¿De cuántas maneras puede llegar?




d) Si un jugador está en 2 y es su turno, ¿cuál es la probabilidad de que gane? ¿Importa el modo en que llegó a 2?
e) Analiza el juego "¿Pescador o pescado?" de la página 56, con un diagrama de árbol y complementa tus respuestas.

**5** Obtengan una respuesta en grupo para la pregunta inicial de esta lección y digan cómo se relaciona con el lanzamiento de un dado.

Conocimiento de la escala de probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

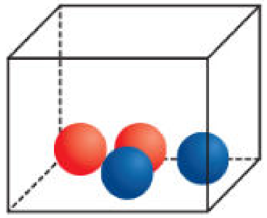
## Eventos independientes II

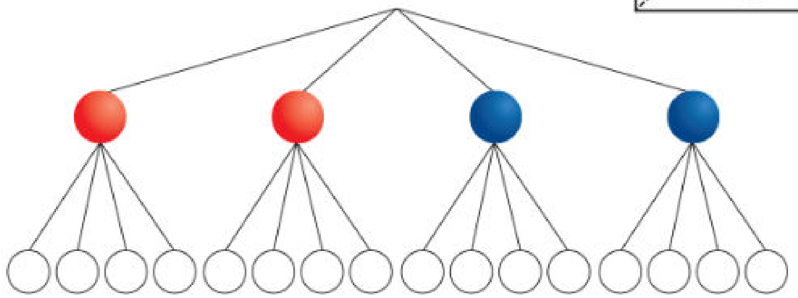
PREGUNTA INICIAL

Un dado no trucado se lanzó tres veces y salió 6. ¿Cuál es la probabilidad de que en el cuarto lanzamiento también salga 6?

**1** Analiza la situación y completa el diagrama de árbol considerando las distintas posibilidades. Después contesta las preguntas.

a) En una urna se tienen dos pelotas azules y dos rojas. Se saca una pelota y se regresa a la urna. Después se saca otra pelota.





b) Si la pelota que salió la primera vez es roja, ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente extracción salga una pelota de este color? ______

c) Si la pelota que salió la primera vez es roja, ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente extracción salga una pelota azul? ______

d) ¿Es importante el resultado de la primera extracción para determinar la probabilidad de la segunda? ______ ¿Por qué? ______

**2** Ahora se saca una pelota de la misma urna pero no se regresa. Elabora un diagrama de árbol con todas las posibilidades y contesta las preguntas de la página siguiente.





a) Si la pelota que salió la primera vez es roja, ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente extracción salga una pelota del mismo color? ______ ¿Por qué? ______

b) Si la pelota que salió la primera vez es azul, ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente extracción salga una pelota roja? ______ ¿Por qué? ______

**3** Lee la información del recuadro y responde las preguntas.

Dos eventos son *independientes* cuando uno no condiciona que suceda el otro.

a) Si se saca una pelota de la urna y se regresa, ¿la segunda extracción y la primera son eventos independientes? ______ ¿Por qué? ______

b) Si se saca una pelota de la urna y no se regresa, ¿la segunda extracción y la primera son eventos independientes? ______ ¿Por qué? ______

**4** Analiza lo que dicen los personajes y contesta las preguntas.


a) ¿Tiene razón el personaje de la derecha? ______ ¿Por qué? ______

b) ¿Crees que en la lotería es más probable que salga un número que otro? ______ ¿Por qué? ______

**5** Hagan una lluvia de ideas con ayuda de su profesor para contestar la pregunta inicial de esta lección. Justifiquen sus argumentos con el concepto de evento independiente.

Conocimiento de la escala de probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

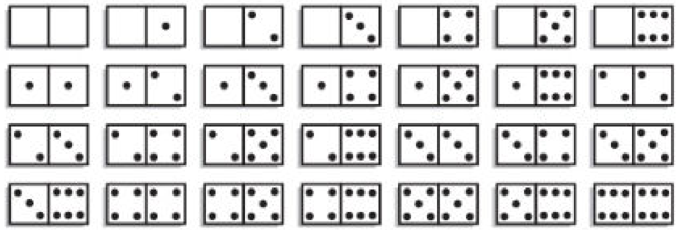
## Eventos complementarios y mutuamente excluyentes

PREGUNTA INICIAL

Si la probabilidad de que suceda un evento es $\frac{2}{3}$, ¿cuál es la probabilidad de que no suceda?

**1** Analiza la siguiente situación y contesta las preguntas.

Esther y Manuel juegan con estas fichas de dominó:



Meten las fichas en una bolsa y sacan una al azar. Si la suma de los puntos es mayor que 1 y menor que 6, gana Esther; si la suma es igual o mayor que 6, gana Manuel.

a) Dibuja las fichas con las que Esther gana.

b) Dibuja las fichas con las que gana Manuel.

c) ¿Siempre que se saca una ficha gana alguno de los dos? ______ ¿Por qué? ______

d) ¿Puede ser que al sacar una ficha ganen los dos? ______ ¿Por qué? ______

**2** Ahora cambiaron un poco las reglas del juego. Analízalas y haz lo que se indica.

Esther y Manuel deciden cambiar el juego y acuerdan que ahora Manuel gana si los puntos de la ficha que saquen suman 10 o tiene un 1 (consideran que la ficha [1, 1] tiene un 1); Esther gana si los puntos suman 8 o si tienen un 4.

a) Dibuja las fichas con que gana Manuel.

b) Dibuja las fichas con que gana Esther.





c) ¿Hay fichas con las que ganen ambos? ______ ¿Por qué? ______

d) ¿Hay fichas con las que no gane ninguno? ______ ¿Por qué? ______

**3** En otra variante del juego, si la suma de los puntos es menor que 6, gana Esther; en caso contrario, gana Manuel.

a) ¿Siempre que se saca una ficha gana alguno de los dos? ______

¿Por qué? ______

b) ¿Puede ser que al sacar una ficha ganen los dos? ______

Explica por qué ______

c) ¿Hay fichas con las que no gane alguien? ______ ¿Por qué? ______

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros de grupo y si es necesario, corrígelas.

**4** Trabajen en pareja para leer la siguiente información. Después contesten en su cuaderno.

Se llaman *eventos mutuamente excluyentes* los que nunca pueden suceder de manera simultánea.
Por otro lado, los *eventos complementarios* son los que no ocurren cuando está sucediendo otro evento; juntos suman todos los eventos posibles de un experimento.

a) ¿En cuáles de los tres casos de la actividad 1 se presentan eventos mutuamente excluyentes? ¿Por qué?
b) ¿En cuáles se presentan eventos que no son mutuamente excluyentes? ¿Por qué?
c) ¿En cuáles se presentan eventos complementarios? ¿Por qué?

**5** Considera el evento de lanzar dos dados y elabora en tu cuaderno una tabla como la siguiente con los ejemplos que se piden.

| | |
|---|---|
| Dos eventos mutuamente excluyentes | |
| Dos eventos que no son mutuamente excluyentes | |
| Tres eventos mutuamente excluyentes | |
| Dos eventos complementarios | |

- Comparen en el grupo sus respuestas de las actividades 4 y 5, y con ayuda del profesor concluyan cuáles son las más acertadas.

**6** En grupo y con ayuda de su profesor calculen la respuesta a la pregunta inicial. Justifiquen sus resultados aplicando los conceptos estudiados en esta lección.

TIC

Ingresa al sitio <www.cuaed.unam.mx/matematicas/probabilidad.html>, analiza su contenido y comenta con tus compañeros el concepto de eventos mutuamente excluyentes.

Conocimiento de la escala de probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

## Recolección de datos

PREGUNTA INICIAL

¿Qué casos conoces en los que se haya aplicado una encuesta? ¿Para qué se aplicó?

**1** Lee la situación y haz lo que se pide.

Se desea saber lo que los alumnos de tercer grado de una secundaria conocen sobre las culturas prehispánicas, así que se les formuló la siguiente pregunta:

¿De qué cultura prehispánica sabes más?

a) En la escuela hay tres grupos de tercero, cada uno de 45 alumnos. ¿Es necesario plantearles a todos la pregunta para obtener la información que se necesita? ______
¿Por qué? ______________________________

b) Se piensa aplicar la pregunta a 20 alumnos. ¿Cómo se deben escoger? ______
¿Por qué? ______________________________

c) Observa los datos recabados y organízalos en la tabla siguiente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| mexica | maya | mexica | olmeca | mexica |
| maya | teotihuacana | tolteca | tolteca | olmeca |
| mixteca | zapoteca | mexica | maya | mexica |
| mixteca | zapoteca | maya | olmeca | teotihuacana |

| Cultura prehispánica | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| mexica | | |
| maya | | |
| mixteca | | |
| olmeca | | |
| teotihuacana | | |
| tolteca | | |
| zapoteca | | |

d) ¿Con los datos anteriores puedes deducir información acerca de todos los alumnos de la escuela? ______ ¿Por qué? ______________________________





**Métodos de recolección de datos**

- *Experimento*: se modifica el entorno y se observa el efecto sobre la variable estudiada.
- *Encuesta*: los datos se obtienen mediante preguntas a una parte de la población que se llama muestra.
- *Observación*: los datos se recolectan mediante la observación planeada y rigurosa.
- *Censo*: se consulta u observa a todos los individuos de una población.
- *Muestreo*: se selecciona sólo un parte de la población para obtener los datos.

**2** Organiza en tu cuaderno una tabla con la información y contesta las preguntas.

En una empresa hay 200 empleados. Se escogió a 30 de ellos y se les preguntó cuántos hijos tienen. Las siguientes fueron las respuestas:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 4 | 5 | 1 | 5 |
| 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 |

a) Si los 30 empleados se eligieron de un solo departamento, ¿los datos son útiles para deducir información de toda la empresa? ______ ¿Por qué? ______________________________

b) Si los 30 empleados que se eligieron son mujeres, ¿los datos son útiles para deducir información de toda la empresa? ______ ¿Por qué? ______________________________

c) Si los empleados se eligieron al azar, ¿los datos son útiles para deducir información de toda la empresa? ______ ¿Por qué? ______________________________

d) Supón que la muestra se eligió de manera correcta, por tanto, deduce el promedio de hijos en la empresa con la información obtenida.

**TIC**

Ingresa al sitio <www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/encuestas/hogares/default.aspx>. Hallarás información acerca de las encuestas que efectúa el Inegi. En el grupo, y con ayuda de su profesor, discutan la utilidad de los datos que se obtienen con dichas encuestas.

**3** Formen equipos de cuatro o cinco integrantes y recaben datos en su escuela sobre algún tema que les interese. A continuación se dan algunas sugerencias.

- ¿Cuánto tiempo pasan conectados a internet los estudiantes de su escuela?
- ¿Cuántos de los alumnos que salen de tu escuela continúan sus estudios?
- ¿Cuántos libros leen al año los alumnos de tu escuela?
- ¿Cuál es el transporte que usan más comúnmente los estudiantes de tu escuela?
- ¿Qué deportes prefieren los estudiantes de tu escuela?

a) Determinen cuál es la población de la que recabarán los datos.
b) Elijan las preguntas adecuadamente, de manera que obtengan la información deseada.
c) Determinen a cuántas personas aplicarán la encuesta y cómo las elegirán.

**4** En equipos respondan la pregunta inicial y compleméntenla. Comenten datos, como qué población se estudió, a cuántas personas se aplicó la encuesta y cómo se determinó la muestra.

Diseño de una encuesta o un experimento, e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

## Presentación y organización de datos

**PREGUNTA INICIAL**

¿Por qué es necesario organizar los datos recabados en una encuesta?

**1** Lee la siguiente situación, analízala y contesta las preguntas.

Una empresa fabricante de ropa deportiva quiere incrementar su producción en los modelos que menos demanda tienen entre los jóvenes de 12 y 18 años. Para ello pretende lanzar una campaña publicitaria en la que se incentive a los jóvenes a practicar los deportes en los que menos venta tiene. El equipo de publicidad está diseñando una encuesta para saber las preferencias deportivas del público al que va a ir dirigida la campaña.

a) Subraya la edad que deben tener las personas a las que se dirige la encuesta.

Entre 3 y 12 años Entre 12 y 18 años Entre 18 y 30 años

b) ¿La encuesta debe considerar una pregunta referente al deporte que practican las personas? ______ ¿Por qué? ______

c) ¿Cuántas personas consideras que deben ser encuestadas si las ventas de esta empresa en el último año fueron de 10 000 conjuntos deportivos? Subraya tu respuesta.

Entre 10 y 100 Entre 1 000 y 2 000 Entre 10 000 y 15 000

d) A continuación presentamos información sobre las ventas de esta empresa, por disciplina deportiva. Completa la tabla con los datos que hagan falta.

| Ventas de ropa deportiva para jóvenes de entre 12 y 18 años | | |
|---|---|---|
| Disciplina | Cantidad | Porcentaje |
| Atletismo | 2 932 | |
| Futbol | 3 598 | 35.98 |
| Basquetbol | 1 720 | |
| Beisbol | 981 | |
| Ciclismo | 769 | |
| Total | | |

e) ¿En la ropa de qué disciplina debe incrementar sus ventas esta empresa?

______

f) Sugiere tres aspectos que se deban considerar para llevar a cabo la encuesta de la mencionada empresa.

1. ______
2. ______
3. ______

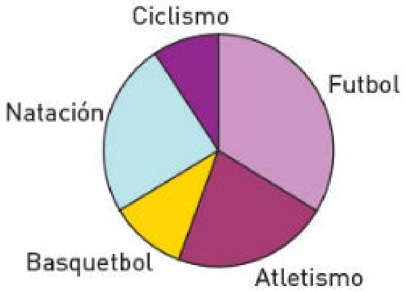
- Comenta tus respuestas con el grupo y con ayuda de su profesor concluyan cuáles son las que presentan mejores argumentos.





**2** Analiza la información y la gráfica circular que se presentan a continuación y contesta las preguntas.

Se realizó una encuesta a 36 alumnos de un grupo de tercer grado de secundaria sobre sus preferencias deportivas.




a) ¿Puedes saber a qué porcentaje de estudiantes les gusta el futbol aunque no conozcas el total de ellos?

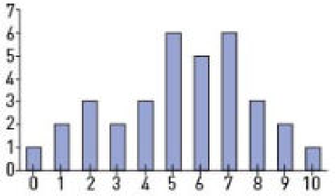
Justifica tu respuesta: ______

b) ¿Qué ventajas tiene este tipo de gráfica sobre una gráfica de barras? ______

c) ¿Qué desventajas tiene este tipo de gráfica respecto a una gráfica de barras? ______

**3** Reúnete con un compañero, analicen la información y contesten.

En todo el país los estudiantes presentaron un examen final. Tanto la gráfica de barras como el polígono de dispersión, respectivamente, presentan el número de aciertos que una muestra de 34 alumnos obtuvo en la prueba mencionada.





a) ¿Es distinta la información que presenta cada gráfica? Justifiquen su respuesta.

______

b) ¿Son útiles estos datos para hacer un diagnóstico de los conocimientos que poseen los alumnos de todo el país? ______ ¿Por qué? ______

c) ¿Sirven estos datos para diagnosticar a todos los alumnos de tercer grado de la escuela en la que se tomó la muestra? ______ Justifiquen su respuesta: ______

**4** Para resolver la pregunta inicial, lean la siguiente información y elaboren en grupo una lista de ventajas y desventajas de organizar los datos de una encuesta. Comenten las distintas formas de presentar la información.

La presentación y organización de los datos de una encuesta o estudio dependen de los fines que se persigan. El propósito de organizar la información es mostrar cómo cambia un dato en relación con el tiempo, comparar entre sí dos o más variables, comparar valores de datos en relación con un total o con otros datos, evidenciar tendencias de grupos sociales, entre otros.

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

# Evaluación

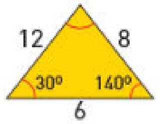


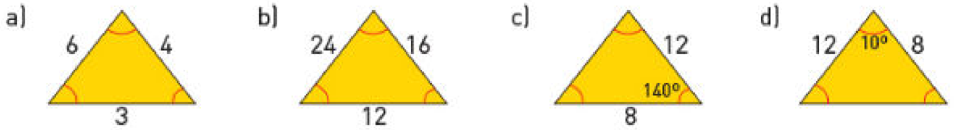
Analiza las siguientes preguntas y subraya la respuesta correcta.

**1** Un terreno rectangular tiene 330 m$^2$ de superficie y mide 7 metros más de largo que de ancho. Si $x$ representa el largo del terreno, ¿qué ecuación relaciona las medidas de los lados con el área y cuál es su solución?

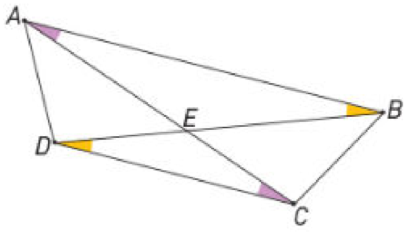
a) $x(x - 7) = 330$; $x = 22$  b) $x(x + 7) = 330$; $x = 15$
c) $x(x - 7) = 330$; $x = 15$  d) $x(x + 7) = 330$; $x = 22$

**2** Selecciona el triángulo congruente con el de la derecha.



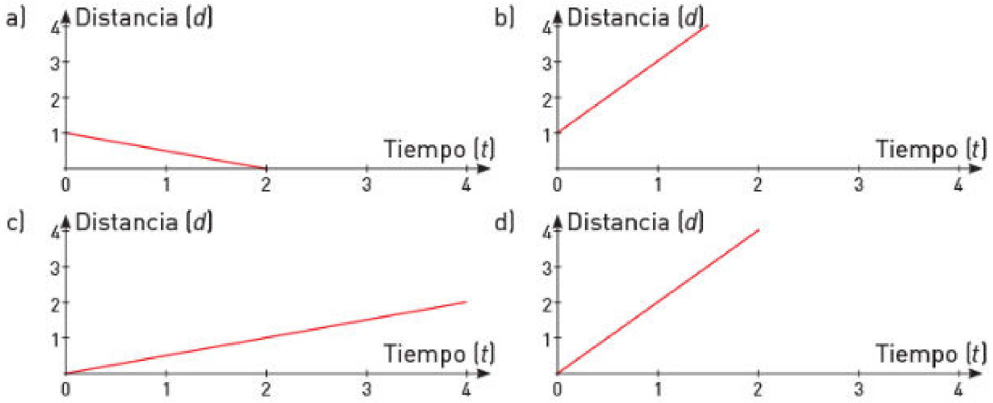




**3** En la figura, el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al $\overline{CD}$ y los ángulos del mismo color son de igual medida. ¿Qué triángulos podemos afirmar que son semejantes?




a) *ABE* y *CED*.
b) *AED* y *CEB*.
c) *ABE* y *CED*; *AED* y *CEB*.
d) No hay triángulos semejantes.

**4** La distancia ($d$) de un móvil al punto de partida y el tiempo transcurrido ($t$) se relacionan mediante la ecuación $d = 2t + 1$. ¿Qué gráfica corresponde a esta situación?




**5** Julio invirtió \$2 000.00 para comprar un lote de productos. Por cada producto vendido, él obtiene una ganancia de \$45.00. Selecciona la ecuación que relaciona la cantidad de productos vendidos con su ganancia final.

a) $y = 45x - 2000$  b) $y = 45x + 2000$
c) $y = 2000x + 45$  d) $y = 2000x - 45$



**6** Un proyectil fue lanzado verticalmente hacia arriba. La tabla muestra la relación entre la altura alcanzada y el tiempo transcurrido. ¿Qué expresión determina la altura del proyectil sobre el piso ($h$) después de $t$ segundos?

| $t$ (s) | $h$ (m) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 83.1 |
| 2 | 156.4 |
| 5 | 317.5 |
| 10 | 390.0 |
| 15 | 217.5 |
| 18 | –3.6 |
| 19 | –96.9 |
| 20 | –200 |

a) $h = h(49 - 8.8h)$
b) $h = -h(49 - 8.8h)$
c) $h = h(88 - 4.9h)$
d) $h = -h(88 - 4.9h)$

**7** En un partido de futbol la probabilidad de que gane el equipo local es $\frac{6}{10}$; la de que lo haga el equipo visitante, $\frac{1}{10}$. ¿Qué probabilidad hay de que suceda cualquiera de las dos cosas?

a) $\frac{3}{10}$  b) $\frac{4}{10}$  c) $\frac{7}{10}$  d) $\frac{9}{10}$

**8** En una caja que sólo tiene canicas rojas y negras, la probabilidad de sacar al azar una roja es $\frac{3}{5}$. Si se sabe que 12 canicas son negras, ¿cuántas hay en total?

a) 30  b) 20  c) 18  d) 8

**9** Para conocer cuál es su deporte favorito, Pedro levantará una encuesta entre sus compañeros de escuela; pero para no encuestar a todos, sólo tomará una muestra representativa de cada grupo. Si en primer grado hay 300 alumnos; en segundo, 240; y en tercero, 180, ¿qué opción corresponde a una muestra adecuada de la población?

a) Primer grado: 15 niñas y 15 niños; segundo grado: 12 niñas y 12 niños; tercer grado: 9 niñas y 9 niños.
b) Primer grado: 10 niñas y 20 niños; segundo grado: 10 niñas y 14 niños; tercer grado: 14 niñas y 4 niños.
c) Primer grado: 9 niñas y 9 niños; segundo grado: 12 niñas y 12 niños; tercer grado: 15 niñas y 15 niños.
d) Primer grado: 4 niñas y 14 niños; segundo grado: 14 niñas y 10 niños; tercer grado: 4 niñas y 14 niños.

**10** La tabla muestra los resultados de una encuesta efectuada por una empresa automotriz para planear la producción del próximo año.

| Si planea comprar un vehículo, ¿de qué tipo sería? | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Automóvil compacto | Camioneta | Motocicleta | Bicicleta | Otro/No contestó |
| 2 825 | 1 117 | 512 | 277 | 269 |

Si se quiere evidenciar que más de la mitad de los encuestados prefiere un automóvil compacto, ¿qué tipo de gráfica es más conveniente para representar los datos?

a) Una gráfica circular.  b) Una gráfica de barras.
c) Un histograma.  d) Un polígono de frecuencias.

Lee la información y responde lo que se pide.

La siguiente tabla muestra, para algunas regiones del mundo, el número de habitantes en 2011, el porcentaje de usuarios de internet respecto a la población y la cantidad de conexiones fijas de banda ancha* por cada 100 habitantes.

| País o región | Población en 2011 (millones de personas) | Porcentaje de la población que usa internet | Conexiones de banda ancha por cada 100 habitantes* |
|---|---|---|---|
| Costa Rica | 4.7 | 39.2 | 6.2 |
| Países Bajos | 16.7 | 91.4 | 38.0 |
| Italia | 60.8 | 54.4 | 22.1 |
| México | 114.8 | 37.2 | 10.0 |
| Unión Europea | 502 | 68.6 | 24.2 |
| Latinoamérica y el Caribe | 596 | 39.4 | 5.3 |

*No se consideraron redes móviles, como las de telefonía celular.
Elaboración propia con datos de goo.gl/6z5UGP y goo.gl/734L9M (Consultada el 2 de octubre de 2014).

**Pregunta 1.** ¿En qué países el porcentaje de internautas es parecido al de su región? _______________ ¿En cuáles sucede lo contrario? _______________

Escribe en tu cuaderno alguna posible causa de lo anterior.

**Pregunta 2.** Si elegimos al azar a una persona que viva en Italia, ¿es más probable que use internet o que no? Explica tu respuesta.

_______________________________________________

**Pregunta 3.** ¿Qué gráfica usarías para mostrar que los porcentajes de internautas en México y Costa Rica son muy parecidos? Explica tu respuesta en tu cuaderno.

_______________________________________________

¿Y para mostrar que la población de Italia es aproximadamente la octava parte de la de la Unión Europea? _______________________________

**Pregunta 4.** Calcula cuántas conexiones de banda ancha había en Holanda en 2011.

_______________________________________________

**Pregunta 5.** ¿Qué expresión relaciona la población de México ($p$) con la cantidad de conexiones de banda ancha en nuestro país ($c$)?

a) $p = 100c$ b) $p = \frac{100}{c}$ c) $p = 10c$ d) $p = \frac{10}{c}$



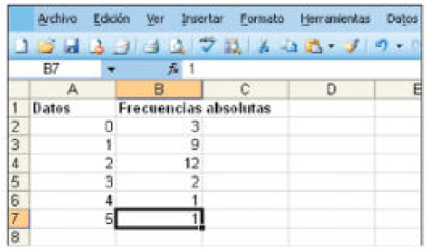


## TIC. Gráficas en la hoja de cálculo

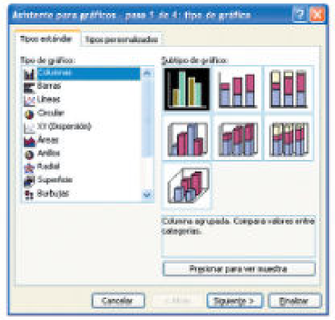
Una hoja de cálculo es una herramienta muy útil para elaborar gráficas y, de esta forma, analizar mejor los datos provenientes, por ejemplo, de una encuesta.

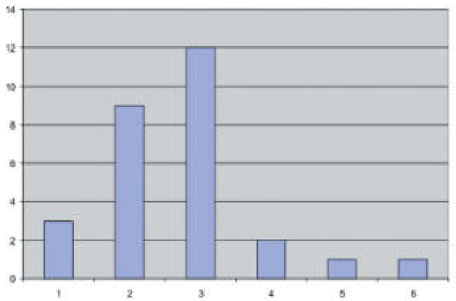
Se preguntó a 30 personas sobre el número de hermanos que tienen, los datos fueron: 1, 2, 1, 1, 5, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 2, 4, 2, 2, 0, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 0

1. Se capturan, en la hoja de cálculo, los datos para formar una tabla.




2. Se selecciona la columna de frecuencias y se escoge *Insertar > Gráfico*. Enseguida aparece un cuadro de diálogo en el que se elige el tipo de gráfico deseado. Por ejemplo, *Columnas*.





3. Pulsar *Siguiente* para pasar por varios menús que definen las características de la gráfica. Al pulsar *Finalizar* se obtiene la gráfica.

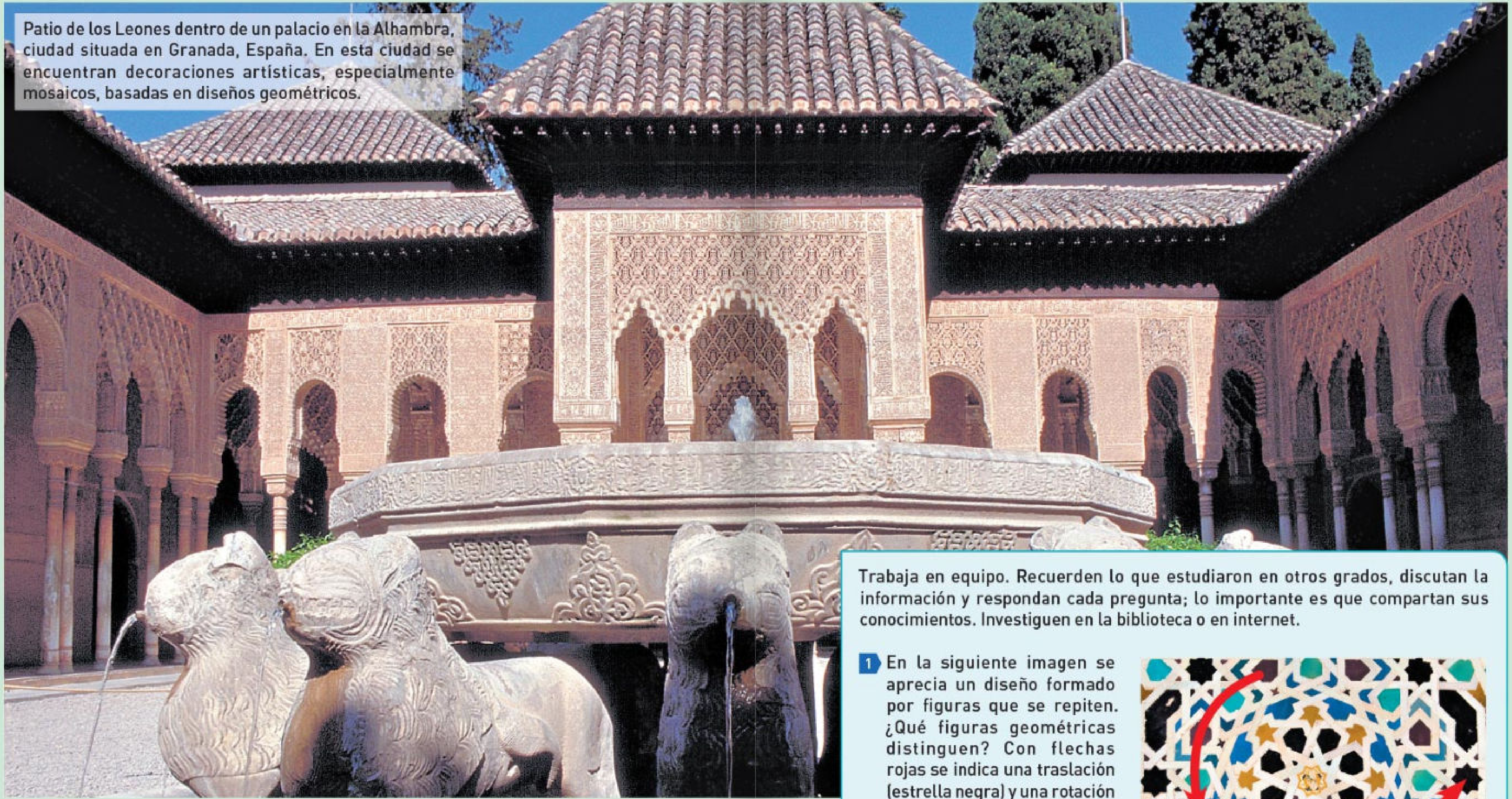
Grafica en una hoja de cálculo los datos que obtuviste en las encuestas que elaboraste en las lecciones anteriores.

## Autoevaluación

Analiza tu desempeño respecto a los aprendizajes esperados del bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

| | Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos | Lo hago solo | Lo hago con ayuda de otros | Necesito la ayuda del profesor |
|---|---|---|---|---|
| Explicar las diferencias entre eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes. | | | | |

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.



Patio de los Leones dentro de un palacio en la Alhambra, ciudad situada en Granada, España. En esta ciudad se encuentran decoraciones artísticas, especialmente mosaicos, basadas en diseños geométricos.

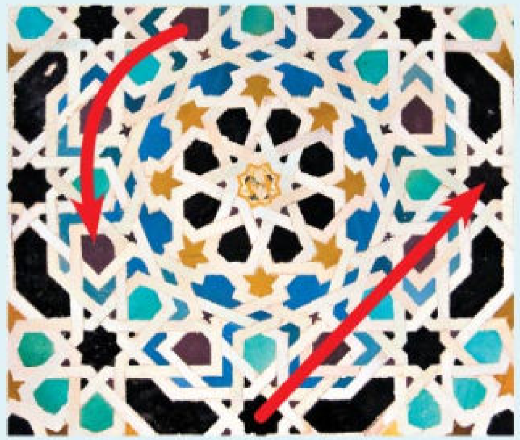
# BLOQUE 2

## Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Trabaja en equipo. Recuerden lo que estudiaron en otros grados, discutan la información y respondan cada pregunta; lo importante es que compartan sus conocimientos. Investiguen en la biblioteca o en internet.

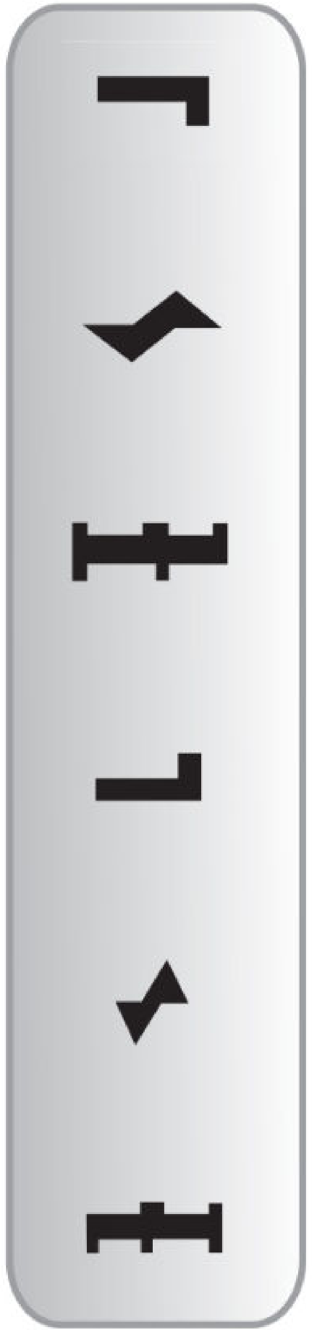
1. En la siguiente imagen se aprecia un diseño formado por figuras que se repiten. ¿Qué figuras geométricas distinguen? Con flechas rojas se indica una traslación (estrella negra) y una rotación (pentágono morado). ¿La traslación también puede ser una rotación? ¿La rotación también puede ser una traslación? ¿Por qué?

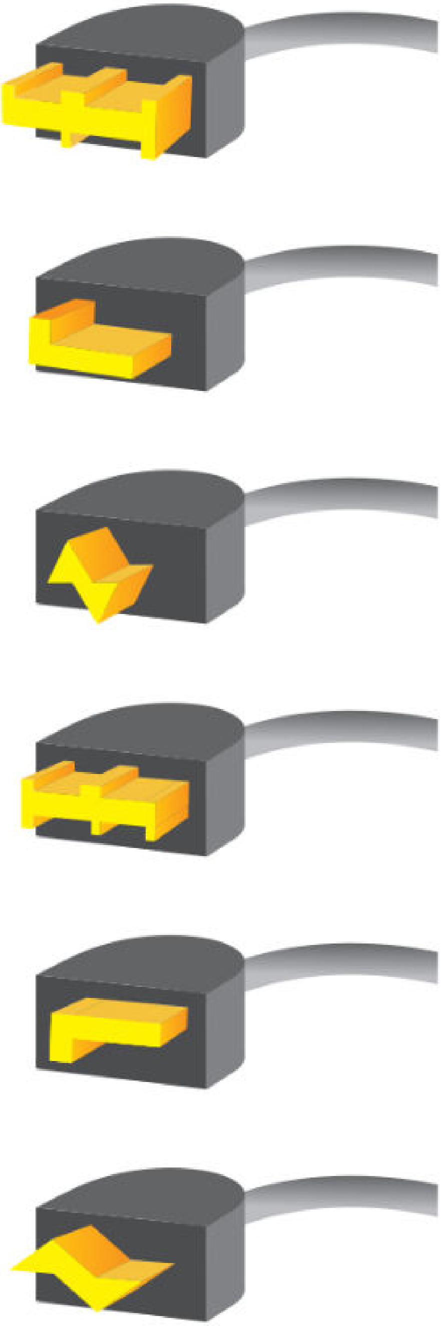


2. En esta imagen también se distingue un hexágono regular. Si sólo se conoce la longitud de sus lados, ¿cómo calcularían su área?

## Figurirretos

Analiza las imágenes y une con una línea cada conector con el lugar que le corresponde.

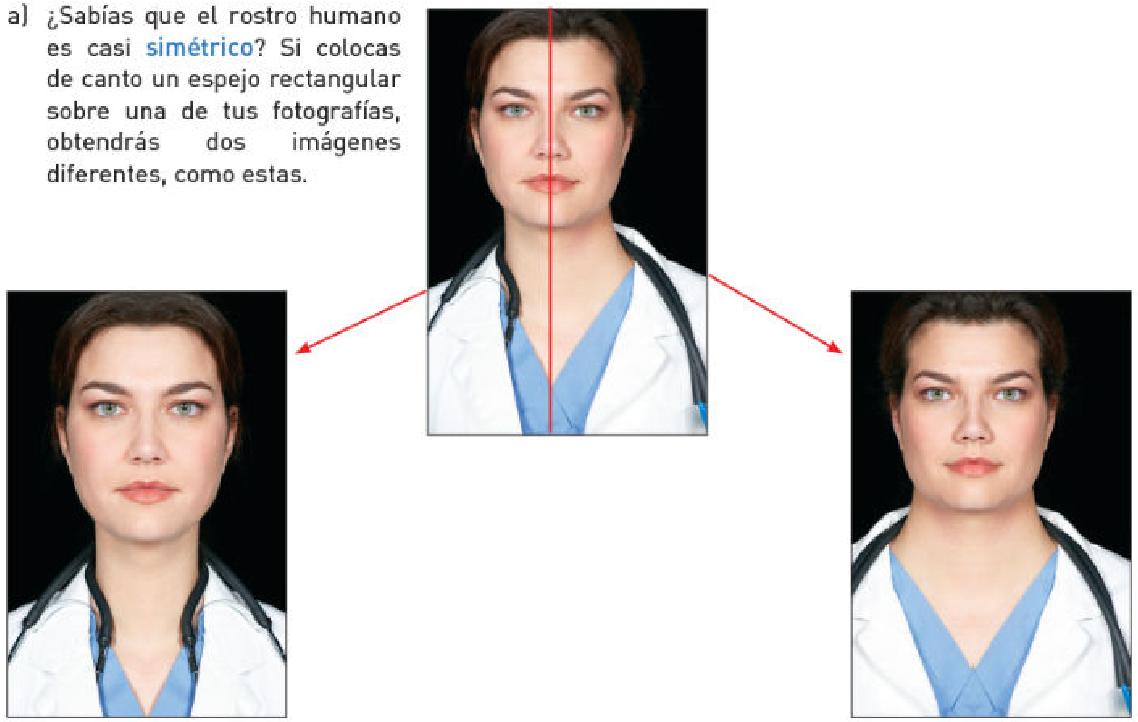




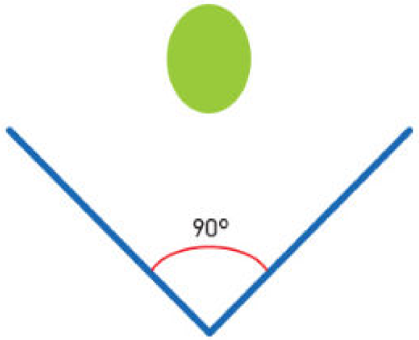


Responde lo que se pide.

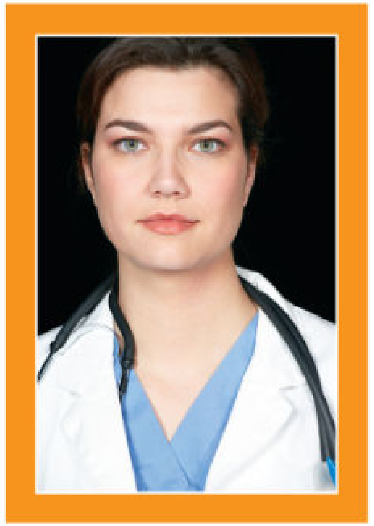
a) ¿Sabías que el rostro humano es casi simétrico? Si colocas de canto un espejo rectangular sobre una de tus fotografías, obtendrás dos imágenes diferentes, como estas.



b) ¿Sabías también que tu imagen en el espejo no es como la ven los demás? Si quieres saber cómo eres en realidad, acomoda dos espejos en ángulo recto y colócate de manera que veas la unión entre ambos. ¿Qué sucede con tu reflejo si volteas a la izquierda?



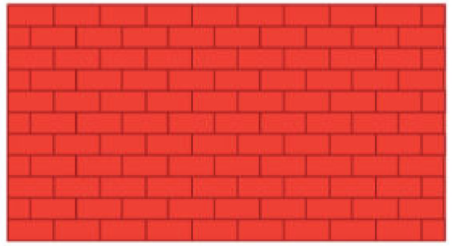

c) A la fotografía, que mide 12 cm de largo y 8 cm de ancho, se le agregó un marco. Si el área del marco es 69 $cm^2$, ¿cuánto mide el ancho del marco?



## Factorización I

PREGUNTA INICIAL

¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es $x^2 - 20x + 100 = 0$?



Como hemos visto en algunas lecciones de este libro, las funciones cuadráticas permiten resolver varias situaciones de la vida cotidiana. En esta ocasión se analizará la forma de calcular las distintas medidas que puede tener una pared de forma rectangular, como la que se muestra en la figura, cuya área está determinada por la ecuación $A = 12x^2 + 24x$.

**1** **Determina las distintas medidas de alto y largo para que la pared ocupe un área de 96 m².**

Se sabe que el área de un rectángulo se calcula mediante la multiplicación de dos factores (base × altura) y se tiene la fórmula $A = 12x^2 + 24x$; necesitamos cambiarla a la forma de multiplicación de dos factores; es decir, vamos a hacer una *factorización*.

La *factorización* es una técnica que permite transformar una expresión algebraica en una forma de producto; para esto se busca un *factor común* a cada término de la misma. Existen varios métodos para factorizar y cada expresión puede transformarse en uno o más resultados. A continuación presentamos algunos ejemplos:

| Expresión | Forma factorizada |
|---|---|
| $15x^2 + 30x$ | $= 3(5x^2 + 10x) = 5(3x^2 + 6x) = 15(x^2 + 2x) = x(15x + 30)$ |
| | $= 15x(x + 2) = 30x(\frac{x}{2} + 1)$ |
| $x^2 + 4x + 4$ | $= (x + 2)(x + 2)$ |
| $8x^2 + 22x + 15$ | $= (2x + 3)(4x + 5)$ |
| $9x^2 - 16$ | $= (3x)^2 - (4)^2 = (3x + 4)(3x - 4)$ |
| $25x^2 + 30x + 9$ | $= (5x + 3)(5x + 3)$ |

a) Factoriza $12x^2 + 24x = 96$ y escribe al menos cinco de sus equivalencias: ______________

______________________________

b) En las expresiones que encontraste identifica cada factor como la base o la altura de la pared, respectivamente. ______________________________

______________________________

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y corríjanlas si es necesario. Comenten cómo encontraron las medidas requeridas.

**TIC**

Ingresa al sitio <cuaed.unam.mx/math_media/algebra/fact_trinomio/index.php>. Analiza la información del material interactivo que ahí se presenta y resuelve las factorizaciones sugeridas.





**2** **Reúnete con tres compañeros y hagan lo que se indica.**

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como un producto. Así, $15x^2 + 30x = 0$ puede factorizarse de las siguientes maneras:

$15x^2 + 30x = 5(3x^2 + 6x)$ $\qquad$ $15x^2 + 30x = 5x(3x + 6)$

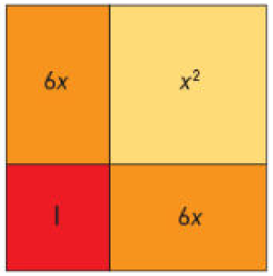
a) Comprueben que las dos igualdades anteriores se cumplan.

**3** **Factoriza las siguientes expresiones.**

a) $9x^2 + 3x =$ $\qquad$ b) $3x^2 - 15 =$

c) $4 - 6x^2 =$ $\qquad$ d) $-56x^2 - 35 =$

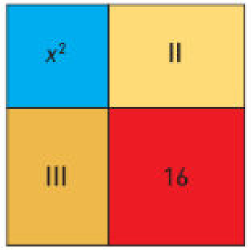
**4** **Escribe las áreas que faltan en cada figura y contesta.**




Área de I · __________

a) ¿Cómo encontraste el área del cuadrado I? ______________

______________________________




Área II · __________ Área III · __________

b) ¿Cómo calculaste el área de cada rectángulo? ______________

______________________________

**5** **Discute con tu equipo qué término falta en los siguientes trinomios cuadrados perfectos y anótalo.**

a) $49 - 14x$ ________ $\qquad$ b) $4x + x^2$ ________ $\qquad$ c) $x^2 + 64x$ ________

d) $22x - x^2$ ________ $\qquad$ e) $x^2 - \frac{1}{2}x$ ________ $\qquad$ f) $\frac{3}{4}x + x^2$ ________

**6** **Determinen qué expresiones son trinomios cuadrados perfectos y subráyenlas.**

a) $x^2 + 4x + 16$ $\qquad$ b) $64 - 16x + x^2$ $\qquad$ c) $-49 + x^2 + 14x$ $\qquad$ d) $6x + 9 + x^2$

e) $x^2 + 25 - 10x$ $\qquad$ f) $x^2 + 10x - 25$ $\qquad$ g) $\frac{1}{36} + 13x + x^2$ $\qquad$ h) $5x - 52 + x^2$

**7** **Para resolver la pregunta inicial de esta lección, factoricen la ecuación a la forma $(x - a)^2$ y encuentren los valores de $x$. Discutan en el grupo cuál de los dos valores encontrados es la solución.**

**Recuerda**

En segundo grado aprendiste a elevar un binomio al cuadrado.

El resultado de elevar un binomio al cuadrado es un trinomio cuadrado perfecto:

$(x + a)^2 =$

$x^2 + 2ax + a^2$

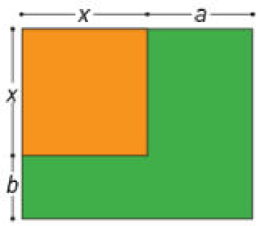
Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

## Factorización II

PREGUNTA INICIAL

Si el área de un rectángulo se calcula con $x^2 - 49 = 0$, ¿cuánto miden sus lados?

**1** Analiza las figuras y responde las preguntas.




Los papás de Apolo compraron un terreno de forma rectangular como el de la figura. El cuadrado naranja representa la casa y el resto, en color verde, es el jardín. El área de todo el terreno se calcula con la fórmula $x^2 + 9x + 18 = 0$.

a) Calcula el valor de $a$ y $b$.

Si recuerdas lo estudiado en la lección anterior, tenemos que $x^2 + 9x + 18$ puede expresarse como $x^2 + (a + b)x + ab$, entonces, para este caso vemos que $9x = (a + b)x$; es decir, $a + b = 9$; además, $ab = 18$. Buscamos dos números que sumen 9 y multiplicados den 18, éstos son:

$a =$ ________ $b =$ ________

b) Si el área de la casa mide 361 m², calcula el área total del terreno.

Como $x^2 = 361$, entonces $x =$ ____. Por lo tanto: $A = ($ ____ $+ 9)($ ____ $+ 3) =$ ____ m².

En la actividad anterior encontraste los valores de $a$ y $b$ que cumplen la siguiente igualdad:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + 9x + 18$$

Recuerda que $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Entonces $x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 9x + 18$

**2** Completa la tabla con parejas de números enteros cuyo producto sea −48 y calcula cuánto suman.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | −1 | −48 | | | | | | | | |
| B | 48 | 1 | | | | | | | | |
| A + B | 47 | −47 | | | | | | | | |

**Observa**
No dupliques parejas. Por ejemplo, $a = 6$ y $b = -8$ es la misma pareja que $a = -8$ y $b = 6$, pero no es la misma pareja que $a = 8$ y $b = -6$.

**3** Expresa los siguientes trinomios como el producto de dos binomios. Puedes consultar la tabla que elaboraste en la actividad anterior.

a) $x^2 + 47x - 48 =$ $(x - 1)(x + 48)$ b) $x^2 - 47x - 48 =$ ________

c) $x^2 + 13x - 48 =$ ________ d) $x^2 - 2x - 48 =$ ________

e) $8x - 48 + x^2 =$ ________ f) $-48 + x^2 - 8x =$ ________

g) $x^2 - 22x - 48 =$ ________ h) $x^2 + 2x - 48 =$ ________



**4** Factoriza los trinomios siguientes.

a) $x^2 + 5x - 24 =$ ________ b) $g^2 - 11g - 24 =$ ________

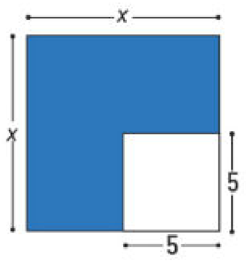
c) $y^2 + 2y - 15 =$ ________ d) $p^2 - 6p - 7 =$ ________

e) $7z - 60 + z^2 =$ ________ f) $8r + r^2 - 7 =$ ________

g) $m^2 - 20 - m =$ ________ h) $63 + w^2 - 16w =$ ________

**5** Expresa las áreas de las partes coloreadas como una diferencia y como un producto de binomios.

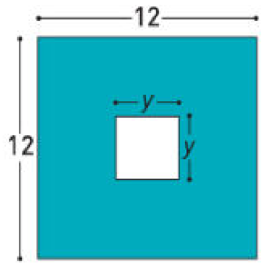
a)




$A =$ ________

$A =$ ________

b)




$A =$ ________

$A =$ ________

**6** Escribe las expresiones como un producto de binomios.

a) $x^2 - 9 =$ ________ b) $49 - y^2 =$ ________ c) $-4c^2 + 25 =$ ________

d) $81 - 36z^2 =$ ________ e) $49 - y^2 =$ ________ f) $256z^2 - 289y^2 =$ ________

Una *diferencia de cuadrados* puede factorizarse como el producto de dos *binomios conjugados*, es decir: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$
Por ejemplo: $x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$
$9x^2 - 121 = (3x + 11)(3x - 11)$

**7** Analiza las oraciones y responde las preguntas.

a) Un número más su cuadrado suman 30. ¿Qué número es? ________

b) El producto de un número y su consecutivo es 30. ¿Qué número es? ________

c) Piensa en cualquier número entero y súmale su cuadrado. Después multiplica el mismo número por su consecutivo. ¿Qué observas? ________

________

**Recuerda**
El consecutivo de cualquier número entero $x$, es $x + 1$.

**8** Para resolver la pregunta inicial de esta lección, comprueben en grupo y con ayuda del profesor que los lados del rectángulo $x^2 - 49$ miden $(x + 9)(x - 7)$ y el área mínima en números enteros que puede ocupar es 17 cm². Resuélvanlo en el pizarrón y dibujen a escala la figura encontrada.

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

## Solución de ecuaciones I

PREGUNTA INICIAL

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x(x-3) = 5x$?

**1** Reúnete con un compañero, analicen las situaciones y efectúen lo que se pide.

La altura a la que se encuentra un cuerpo que cae libremente en el vacío; es decir, sin rozamiento del aire, está determinada por la ecuación:

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Donde $h$ es la altura del cuerpo; $h_0 = 10$ m, la altura inicial en metros (desde donde fue soltado el cuerpo); $g$, la aceleración de la gravedad (9.81 m/s²); y $t$, el tiempo en segundos.

a) Utilicen la ecuación anterior para hallar, con exactitud de dos cifras decimales, cuánto tiempo tardará el cuerpo en llegar al suelo.

El cuerpo tardará ____________ s en llegar al suelo.

b) ¿Cómo hallaron el valor de $t$? ____________

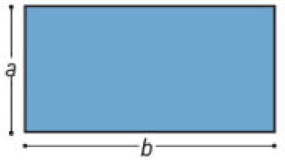
c) ¿El valor de $t$ que hallaron es el único para el cual $h = 0$? ____________

¿Por qué? ____________

**Observa**

Se considera velocidad inicial o tiempo inicial a partir del instante en que comienza el movimiento de un cuerpo.

**2** El perímetro de un rectángulo es de 60 cm. ¿Cuáles pueden ser las medidas de sus lados?




a) Registren algunas posibilidades en la tabla.

| Lado $a$ | 12 | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lado $b$ | 18 | | | | | | | | | | | |

b) Si uno de los lados del rectángulo mide $x$, escribe la medida del otro en términos de $x$. Anótala. ____________

c) El área de un rectángulo de 60 cm de perímetro es 200 cm². Escribe las medidas de sus lados. ____________

d) Plantea una ecuación que corresponda al problema del inciso c). ____________

e) Reúnete con un compañero y encuentren las soluciones a la ecuación que formularon en el inciso d). Documenten paso a paso todo el procedimiento que siguieron para llegar al resultado.

- Con ayuda de su profesor, comparen sus resultados con los del resto del grupo. Corrijan sus errores y comenten sus procedimientos de solución.





**3** Completa la tabla con valores para $a$ y $b$ que hagan verdadera la igualdad $ab = 0$.

| $a$ | 0 | −3 | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 9 | 0 | | | | | | | | | | |

a) ¿Qué valores deben tener $a$ o $b$ para que $ab = 0$? ____________

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$ puede factorizarse al multiplicar por el factor común $x$, así: $x(ax + b) = 0$. Para hallar los valores de $x$ se iguala a cero cada factor, de tal manera que $x = 0$ y $ax + b = 0$; por tanto, las soluciones son $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$.

**4** Observa cómo resolvieron Arturo y Claudia la ecuación $x^2 \cdot 7x$.

| Arturo | Claudia |
|---|---|
| Divido entre $x$ ambos miembros de la ecuación: $\frac{x^2}{x} = \frac{7x}{x}$ <br> $x = 7$ <br> La solución es 7. | Resto $7x$ en ambos miembros: <br> $x^2 - 7x = 7x - 7x$ <br> $x^2 - 7x = 0$ <br> Factorizo el miembro izquierdo: $x(x-7) = 0$. <br> Entonces, $x = 0$ o $x - 7 = 0$. <br> Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 7$. |

a) Verifica que las respuestas que encontró Claudia son soluciones de la ecuación.

b) ¿Cómo halló Claudia las soluciones de la ecuación después de factorizar? ____________

c) ¿Por qué Arturo encontró solamente una solución? ____________

d) Con ayuda del profesor, comenta con el grupo las respuestas a la pregunta anterior.

e) ¿Qué método usarías, el de Claudia o el de Arturo, para resolver la ecuación que planteaste en la actividad 2, inciso d)? ________ ¿Por qué? ____________

f) ¿El método de Claudia se puede usar para resolver la ecuación de la actividad 2, inciso a)? ________ ¿Por qué? ____________

**Recuerda**

En álgebra y aritmética la división entre 0 se considera una indeterminación.

**5** Seleccionen a dos compañeros para que resuelvan en el pizarrón la ecuación de la pregunta inicial. Primero reduzcan términos semejantes y después apliquen el método estudiado en esta lección para llegar a $x(x \cdot 8) \cdot 0$.

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

## Solución de ecuaciones II

PREGUNTA INICIAL

¿Qué relación hay entre las soluciones de las ecuaciones $5x^2 + 25x = 0$ y $5x(x - 5) = 0$?

**1** **Analiza el siguiente problema y efectúa las actividades planteadas.**

Tres veces el cuadrado de un número más 54 veces el mismo número es igual a 0. ¿Qué número es?

a) Formula una ecuación que represente lo planteado en el problema. ______________
b) Reúnete con un compañero y comparen las ecuaciones planteadas. Seleccionen una de ellas y resuélvanla. Escriban en el siguiente espacio el método que siguieron y los valores que hallaron al resolverla.

c) Comparen sus procedimientos y respuestas con los de otras parejas. Si alguien usó factorización para resolverla, pídanle que la exponga ante el grupo y discutan si ésta es la manera más simple de resolver la ecuación.

**2** **Comprueba en tu cuaderno que 7 y –7 son soluciones de estas cuatro ecuaciones.**

a) $(y - 7)(y + 7) = 0$  b) $y^2 - 49 = 0$  c) $10y^2 = 490$  d) $3y^2 - 10 = 88 + y^2$

e) En tu cuaderno, comprueba algebraicamente que las ecuaciones de los incisos b), c) y d) pueden transformarse en la ecuación del inciso a).
f) Encuentra otra ecuación cuyas soluciones sean 7 y –7, e intercámbiala con un compañero para que la convierta a la forma $(y - 7)(y + 7) = 0$.

**3** **Trabajen en equipos de tres integrantes para que resuelvan en su cuaderno las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 - 81 = 0$  $x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____
b) $5z^2 - 20z = 0$  $z_1 =$ _____, $z_2 =$ _____
c) $-4w^2 + 100w = 0$  $w_1 =$ _____, $w_2 =$ _____
d) $4s^2 + 8s = 5s^2 - 8s$  $s_1 =$ _____, $s_2 =$ _____
e) $5m^2 + 8m = 8m + 500$  $m_1 =$ _____, $m_2 =$ _____





**4** Comparen sus respuestas y procedimientos de la actividad anterior con los de otros equipos. Después, en grupo, redacten un método para resolver ecuaciones con las siguientes formas, donde *a*, *b* y *c* son constantes y *x* es variable.

a) $x^2 = a^2$  b) $x(ax - b) = 0$  c) $ax^2 + bx \cdot cx$

**5** **Reúnanse en equipo. Lean el siguiente problema, hagan un esquema y planteen una ecuación para resolverlo.**

Un rectángulo mide 151 cm² de área y el largo mide 7 cm más que el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

a) Comparen la ecuación que encontraron con las de otros equipos y elijan las correctas. Recuerden que la misma ecuación puede escribirse de varias maneras. Resuélvanla en grupo.

b) Escriban la ecuación anterior como un producto igualado a 0. Si es necesario, consulten las lecciones 23 y 24 para recordar cómo hacerlo.

$(\qquad)(\qquad) = 0$

c) Factoricen la ecuación anterior y escriban la solución del problema.

Las dimensiones son ________ cm de ancho y ________ cm de largo.

d) ¿Fue útil factorizar la ecuación? ______ ¿Por qué? ______________________
______________________________________________
______________________________________________

**6** **Plantea ecuaciones cuadráticas que tengan las soluciones que se indican en cada caso.**

a) –5 y 11 ________________  b) –7 y –3 ________________
c) –6 y 4 ________________  d) –9 ________________

- Compara las ecuaciones anteriores con las de tus compañeros. Si es necesario, corrige tus errores y comenten los procedimientos que usaron para encontrarlas.

**7** Para resolver la pregunta inicial de esta lección, trabajen en grupo la factorización para llevar las dos ecuaciones a la forma en que más se parezcan y resuélvanlas. Con la ayuda del profesor, planteen sus conclusiones.

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

## Solución de ecuaciones III

**PREGUNTA INICIAL**

¿Qué problema puedes resolver con la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$?

**1** **Por el lanzamiento de producto nuevo, un fabricante tiene el encargo de hacer una lata de $784\pi$ cm³, y para eso diseñó un cilindro con una altura de 16 cm. Haz los cálculos necesarios y contesta las preguntas.**

a) ¿Cuánto debe medir el radio de la lata? ______ cm.

b) Expresa el volumen de la lata en cm³, considera que $\pi \cdot 3.14$ y aproxima tu resultado hasta dos decimales: __________ cm³.

**2** **Lee la siguiente situación y lleva a cabo las actividades indicadas.**

Raúl resolvió la ecuación $x^2 + 15x - 2 = 0$ y Esperanza, la ecuación $3x^2 + 45x - 6 = 0$. Al hacerlo, los dos obtuvieron las mismas soluciones. Raúl dice que ambas ecuaciones son equivalentes.

a) Resuelve las dos ecuaciones. ¿Es cierto que las soluciones de ambas son las mismas? ____________ ¿Por qué? ______________________________

b) Transforma algebraicamente la ecuación de Raúl en la ecuación de Esperanza.

______________________________________________

c) Transforma la ecuación de Esperanza en la ecuación de Raúl.

______________________________________________

**3** **Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones.**

a) $2x^2 + 22x + 48 = 0$ $\quad x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

b) $5y^2 + 5y + 60 = 0$ $\quad y_1 =$ ________, $y_2 =$ ________

c) $8z^2 - 16z + 8 = 0$ $\quad z_1 =$ ________, $z_2 =$ ________

d) $3(w^2 + w) = 168$ $\quad w_1 =$ ________, $w_2 =$ ________

e) $6m^2 + 3m = 3$ $\quad m_1 =$ ________, $m_2 =$ ________

**Observa**

Si te interesa conocer más casos en los que puedes aplicar la resolución de problemas matemáticos, te recomendamos leer el siguiente libro que pertenece a la colección Libros del Rincón: Jouette, André, *El secreto de los números*, Barcelona, Swing, 2008.

**4** **Analiza los problemas que se presentan a continuación y resuélvelos en tu cuaderno.**

a) La suma de un número y su cuadrado es 42. ¿Qué número es? (Hay dos soluciones).

Los números son __________ y __________

b) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 221. ¿Qué números son?

Los números son __________ y __________

c) El doble del área de un cuadrado es igual a 14 veces la longitud de su lado. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

Mide ________ unidades.

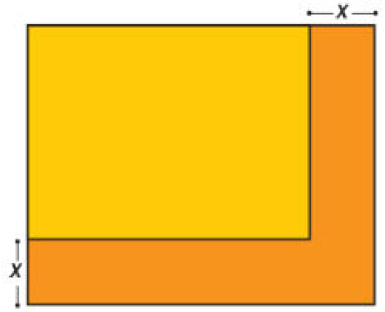




d) Un rectángulo mide 151 cm² de área y el largo mide 7 cm más que el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Las dimensiones son ____________ cm de ancho y __________ cm de largo.

e) Al principio, un rectángulo medía 8 cm de largo y 6 cm de ancho. Cada lado aumentó la misma cantidad de centímetros y el área cambió a 120 cm². ¿Cuánto se aumentó a cada lado?




Se aumentaron __________ cm a cada lado.

f) La cuarta parte del cuadrado de la edad que tenía Héctor hace seis años es igual a la edad que tenía hace siete años. ¿Cuál es la edad de Héctor?

La edad de Héctor es ____________ años.

g) Una alberca rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeada por un camino. Si la anchura del camino es uniforme y su área es 540 m², ¿cuánto mide de ancho?

El camino mide __________________ m de ancho.

**TIC**

Ingresa al sitio <recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_segundo_grado_pav/Ecuacion_segundo_grado_pav.htm>. Analiza la información sobre la factorización y solución de ecuaciones cuadráticas que ahí se presenta y comenta esta experiencia con tus compañeros.

**5** **Compara los resultados obtenidos con los de tus compañeros y de manera grupal determinen por qué aunque las ecuaciones tienen dos soluciones, en la mayoría de los casos sólo usamos una.**

**6** **Trabajen en equipo para responder la pregunta inicial. Sugerimos que factoricen la ecuación mencionada al inicio para que sea más fácil determinar su aplicación. Comparen resultados con los demás equipos.**

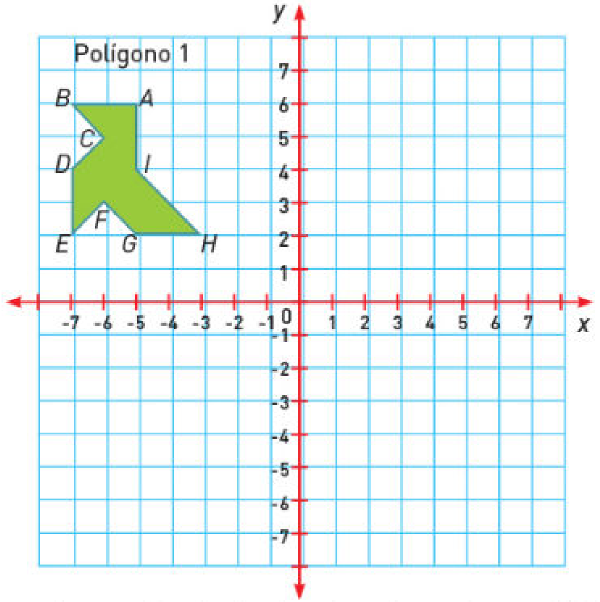
Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

## Traslación de figuras

PREGUNTA INICIAL

¿Cuál es la diferencia entre el cuadrilátero 1 y el 2? ¿Y entre el 1 y el 3?


**1** Observa el plano y anota en la tabla las coordenadas de los vértices del polígono 1.




| Vértice | Coordenadas |
|---|---|
| *A* | (-5, 6) |
| *B* | |
| *C* | |
| *D* | |
| *E* | |
| *F* | |
| *G* | |
| *H* | |
| *I* | |

a) Suma 8 a la abscisa de cada coordenada que escribiste anteriormente.

| Vértice | Coordenadas |
|---|---|
| *A'* | (3, 6) |
| *B'* | |
| *C'* | |
| *D'* | |
| *E'* | |
| *F'* | |
| *G'* | |
| *H'* | |
| *I'* | |

Localiza los puntos *A'*, *B'*, *C'*... hasta *I'* en el plano cartesiano de arriba y únelos ordenadamente con segmentos para formar el polígono 2.

- Contesta en tu cuaderno. ¿Por qué las medidas de los ángulos y de los lados del polígono 2 son iguales a las del polígono 1?

b) Resta 7 a la ordenada de cada coordenada que escribiste en el inciso a).

| Vértice | Coordenadas |
|---|---|
| *A''* | (3, -1) |
| *B''* | |
| *C''* | |
| *D''* | |
| *E''* | |
| *F''* | |
| *G''* | |
| *H''* | |
| *I''* | |

Localiza los puntos *A''*, *B''*, *C''*... hasta *I''* en el plano cartesiano de arriba y únelos ordenadamente con segmentos para formar el polígono 3.

- Contesta en tu cuaderno. ¿El polígono 3 tiene la misma orientación que el polígono 1 o cambia, como en el caso de la simetría? ¿Por qué?





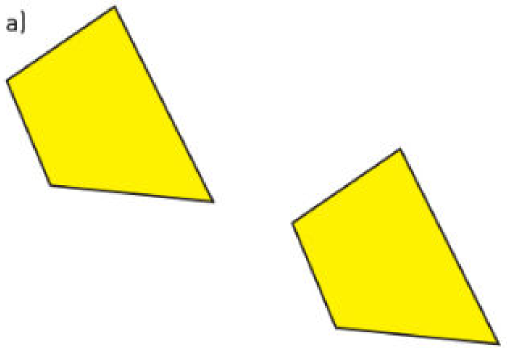
c) Une con segmentos *A* con *A''*, *B* con *B''*, *C* con *C''*, *D* con *D''*, *E* con *E''*, etcétera. Haz lo mismo con los vértices de los polígonos 1 y 3. Compara con tu compás las longitudes de los segmentos que trazaste. ¿Qué puedes decir de éstos? Toma en cuenta su longitud e inclinación. ____________________

____________________

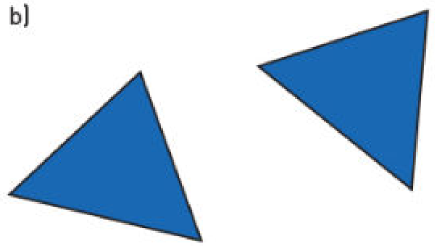
Una figura es la *traslación* de otra si los segmentos que unen los puntos correspondientes de las figuras son paralelos y tienen la misma longitud.

**2** Observa las parejas de figuras e indica, en tu cuaderno, si se efectúa una traslación o no. Justifica tus respuestas.

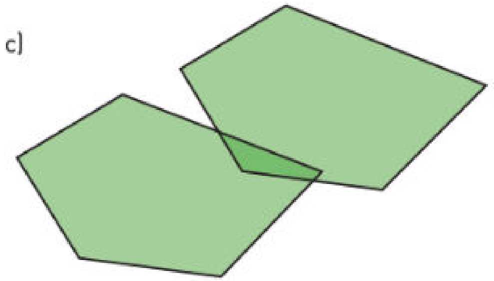
a)



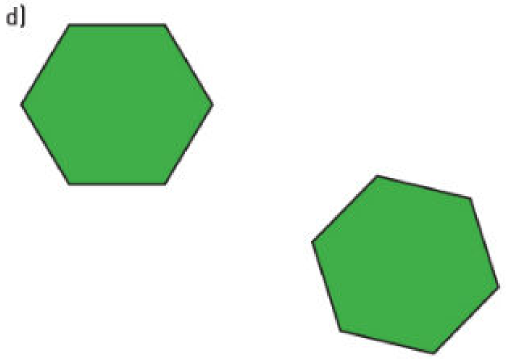
b)



c)



d)



**3** Tracen segmentos de línea que unan los puntos homólogos a cada polígono.

a) ¿Son paralelas estas líneas? ______ ¿Por qué? ____________________

**4** Contesten la pregunta inicial de esta lección considerando la definición de traslación. Lean la información siguiente y con ayuda de su profesor lleguen a las conclusiones en grupo.

Los polígonos 2 y 3 son *traslaciones* del polígono 1.

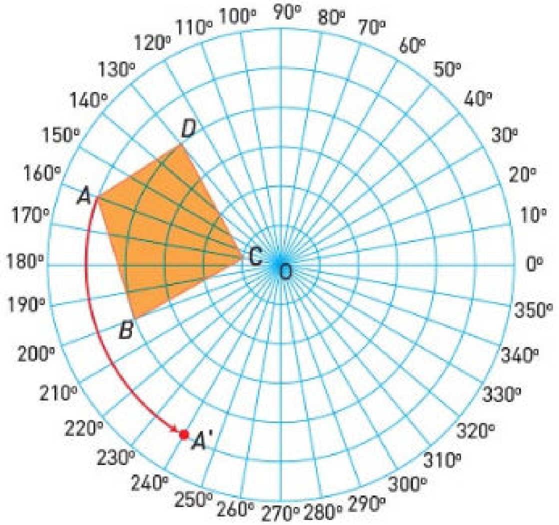
## Rotación de figuras I

PREGUNTA INICIAL

¿Se puede considerar que una simetría es como hacer una rotación de 180°?

**1** En la siguiente figura se ha obtenido una rotación de 80° del vértice *A* respecto al punto O.

a) Encuentra las rotaciones de los vértices *B*, *C* y *D* con el mismo ángulo y dibuja el cuadrilátero *A'B'C'D'*.

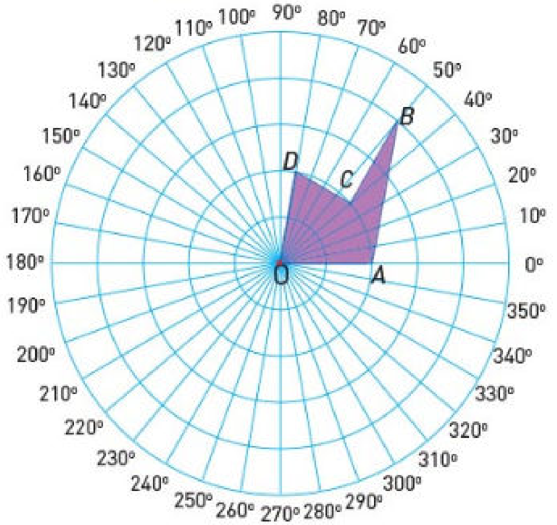



Generalmente los ángulos se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

¿Los cuadriláteros *ABCD* y *A'B'C'D'* son congruentes? Justifica tu respuesta en tu cuaderno.

El punto O se llama centro de rotación. El centro de rotación también se puede encontrar dentro de la figura.

**2** Traza una rotación de 50° del polígono.




a) ¿Qué puntos del polígono permanecieron en el mismo lugar después de la rotación? ____________________

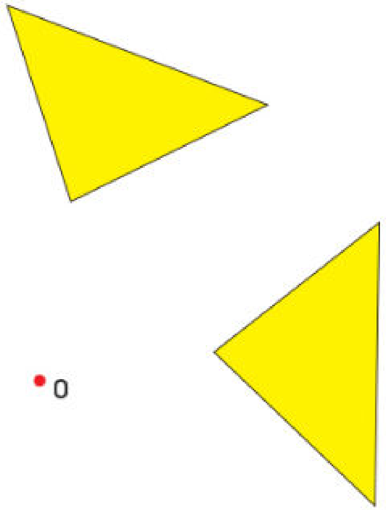
b) ¿Por qué sucedió esto? ____________________



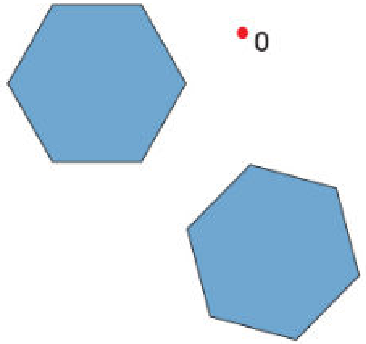


**3** Observa las parejas de figuras e indica en tu cuaderno si ocurre una rotación con respecto a O. Justifica tus respuestas.

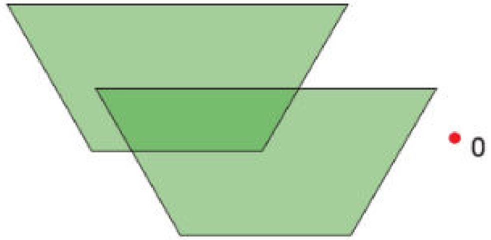
a)



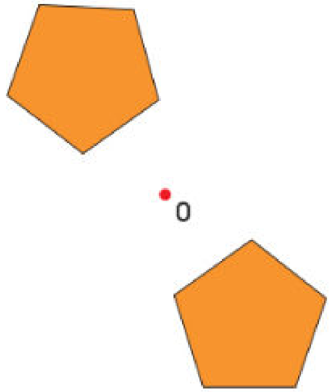

b)




c)




d)




**4** Lean en grupo las oraciones siguientes y decidan cuáles son verdaderas. Escriban la justificación en el pizarrón.

a) En una rotación los ángulos se conservan.
b) Las medidas de los lados de la figura resultante dependen del ángulo de giro en una rotación.
c) En una rotación de 180° el resultado es una traslación.
d) Las medidas de los lados de la figura se conservan en una rotación.
e) Una rotación de 360° equivale a una simetría con respecto a un eje.

**5** Revisen en grupo la pregunta inicial. Justifiquen su respuesta explicando las propiedades de una rotación que se cumplen o no en una simetría.

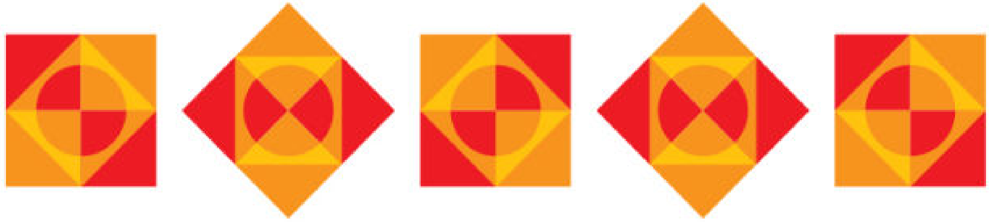
Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

## Rotación de figuras II

**PREGUNTA INICIAL**

Si la imagen de una mariposa se rota 180°, ¿queda igual? ¿Por qué?

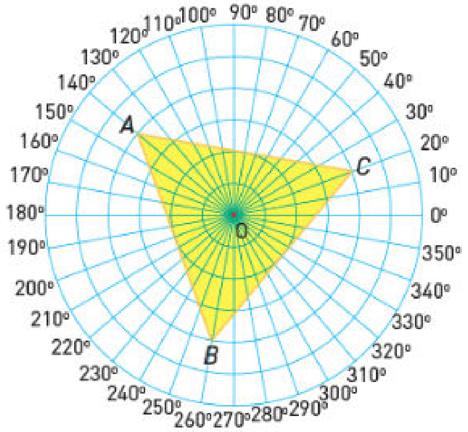
**1** Escribe en cada línea un ángulo que sea la medida de rotación de la primera figura.



____ ____ ____ ____

- Compara tus ángulos con los anotados por tus compañeros. Determinen qué tienen en común los ángulos que generan cada rotación.

**2** Efectúa una rotación de 120° del siguiente triángulo respecto a O. Compara tu resultado con el de tus compañeros y después respondan lo que se pide.

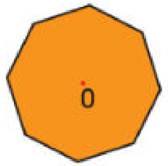


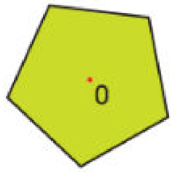

a) ¿De qué tipo de triángulo se trata de acuerdo con sus lados? ____

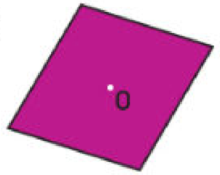
b) Menciona otros dos ángulos de giro con los que se puede obtener un resultado similar. ____

Si una rotación transforma una figura en ella misma, dicha figura es *invariante* ante la rotación.

**3** Escribe con qué ángulos de giro las figuras son invariantes ante la rotación respecto a O. Anota ángulos menores que 360°.

a) 


b) 


c) 


____ ____ ____



**4** Escribe con qué ángulos de giro (menores de 360°) las figuras son invariantes ante la rotación. Marca con un punto rojo el centro de rotación.

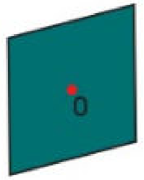


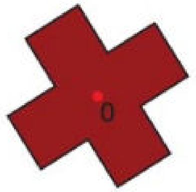
____ ____ ____

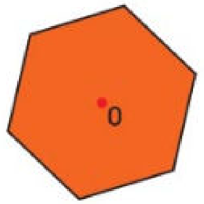
____ ____ ____

- Compara las respuestas de las actividades 3, 4 y 5 con las de tus compañeros. Identifiquen en qué casos las figuras son invariantes en varios ángulos (por ejemplo, un cuadrado es invariante en rotaciones de 90°, 180° y 360°).

**5** Aplica rotaciones de 180° respecto a O en las siguientes figuras.




Si una figura es invariante ante una rotación de 180°, se dice que tiene *simetría central*.

**6** Consigan una imagen como la que sugiere la pregunta inicial y hagan la rotación indicada. En grupo, justifiquen su respuesta usando el concepto de simetría central.

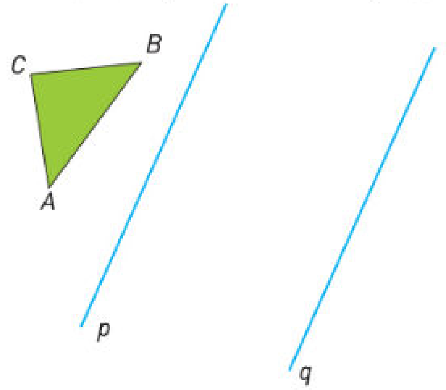
Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

## Transformaciones equivalentes

PREGUNTA INICIAL

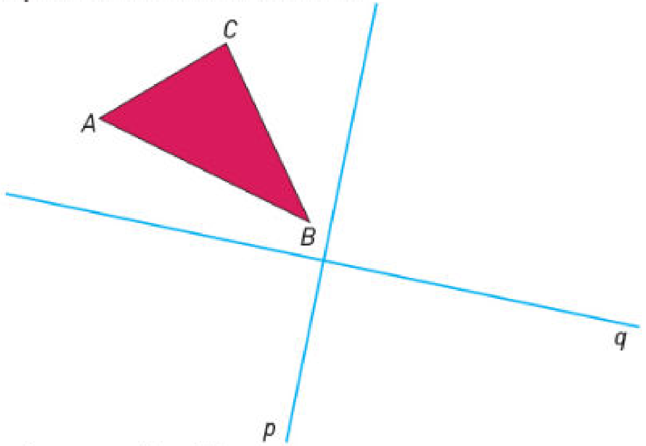
¿Puedes obtener una rotación de 90° de una figura aplicando simetrías? ¿Por qué?

**1** Encuentra la reflexión del triángulo $ABC$ respecto a $p$ y después halla la reflexión de la transformación que obtuviste respecto a $q$. Marca los vértices de los reflejos con $A'$, $B'$ y $C'$, y además, $A''$, $B''$ y $C''$. Contesta las preguntas en tu cuaderno.




a) ¿Cómo son los ejes $p$ y $q$ entre sí?
b) ¿El triángulo $A''B''C''$ es congruente con el triángulo $ABC$?
c) ¿Qué otra transformación podrías haber aplicado a $ABC$ para obtener $A''B''C''$?
d) Si el eje $p$ se inclina 10°, ¿el resultado hubiera sido el mismo? ¿Por qué?

**2** Encuentra la reflexión del triángulo $ABC$ respecto a $p$ y la reflexión de la transformación que obtuviste respecto a $q$. Marca los vértices de los reflejos con $A'$, $B'$ y $C'$; y además, $A''$, $B''$ y $C''$. Después contesta en tu cuaderno.



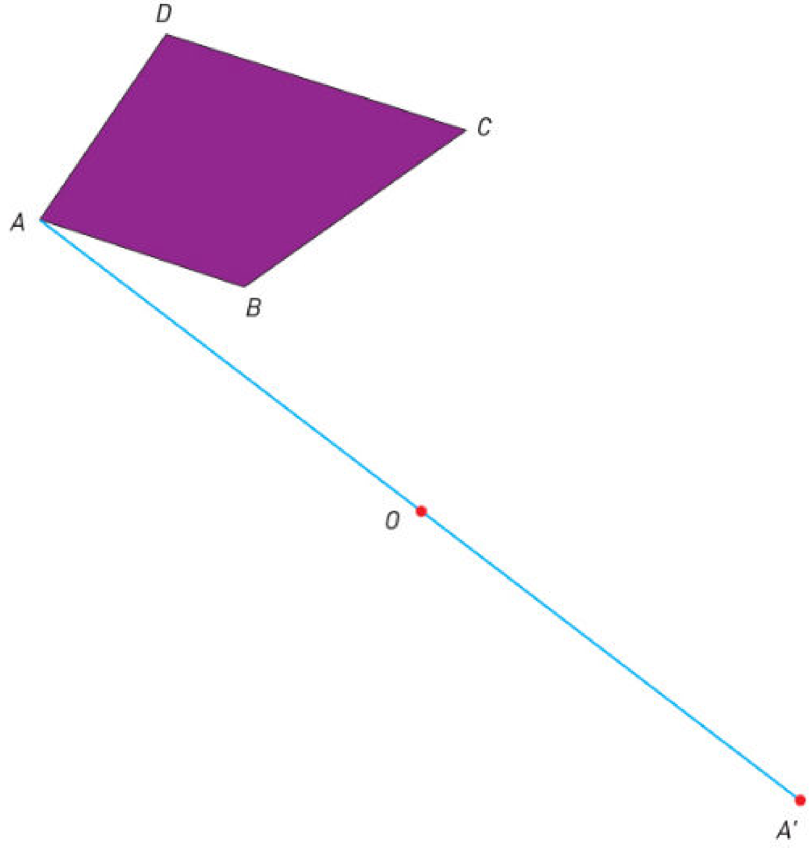

a) ¿Cómo son los ejes $p$ y $q$ entre sí?
b) ¿El triángulo $A''B''C''$ es congruente con el triángulo $ABC$?
c) ¿Qué otra transformación podrías haber aplicado a $ABC$ para obtener $A''B''C''$?
d) Si reflejas el triángulo $A''B''C''$ respecto al eje $p$, ¿qué obtienes?

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Discutan si en cada caso hay varias formas de obtener la figura final a partir de la inicial.





**3** Observa el cuadrilátero y haz lo que se indica.




a) Mide con el compás la longitud de $\overline{AO}$ y comprueba que es igual que la longitud de $\overline{OA'}$.
b) Traza líneas que pasen por $B$ y $O$, por $C$ y $O$ y por $D$ y $O$. Encuentra los puntos $B'$, $C'$ y $D'$ de manera similar a como se encontró $A'$.
c) Traza el cuadrilátero $A'B'C'D'$.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y juntos lleguen a acuerdos acerca de las conclusiones respecto a la manera de realizar las transformaciones.

d) ¿El cuadrilátero $ABCD$ es congruente con el cuadrilátero $A'B'C'D'$? ¿Por qué?
e) ¿Qué otra transformación se puede aplicar a $ABCD$ para obtener $A''B''C''D''$?

**4** En grupo y con ayuda de su profesor, tracen en el pizarrón un cuadrilátero cualquiera, hagan la rotación de 90° y contesten la pregunta inicial.

**TIC**

Ingresa al sitio <nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_294_g_4_t_3.html?open=activities&from=category_g_4_t_3.html>. Aplica la traslación y rotación de las figuras que incluye el material interactivo de este sitio. Comparte con el grupo tu aprendizaje y tus conclusiones.

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

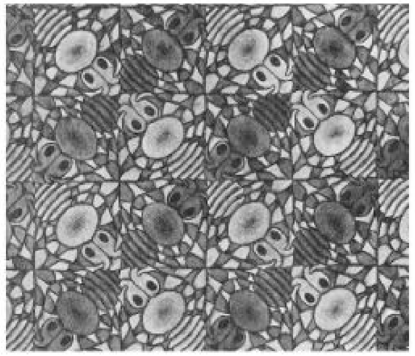
## Diseños

PREGUNTA INICIAL

¿Has visto teselados con transformaciones como simetrías, rotaciones o traslaciones?

Los siguientes teselados de Maurits Cornelis Escher se elaboraron a partir de dos figuras cada uno.

**1** Marca las figuras que los generan y anota qué transformaciones (rotación, traslación o simetría) se utilizan en ellas. En el caso de la rotación, indica el ángulo. Explica tus respuestas.



**2** En el siguiente mosaico romano aparece una figura con distintas rotaciones. Indica de cuánto son los ángulos de las rotaciones.

Los ángulos son de:

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Discutan qué traslaciones observan en la figura de la actividad 2.





**3** El siguiente es un detalle de una pintura de Edouard Benedictus. ¿Qué transformaciones de figuras encuentras?

**4** Elabora un diseño en el que apliques transformaciones como las que hemos visto.

**5** Explica ante el grupo cómo hiciste tu diseño y qué tipo de transformaciones empleaste. Consigan imágenes de los teselados mencionados en la pregunta inicial y comenten a sus compañeros en qué situaciones han visto traslaciones, simetrías y rotaciones.

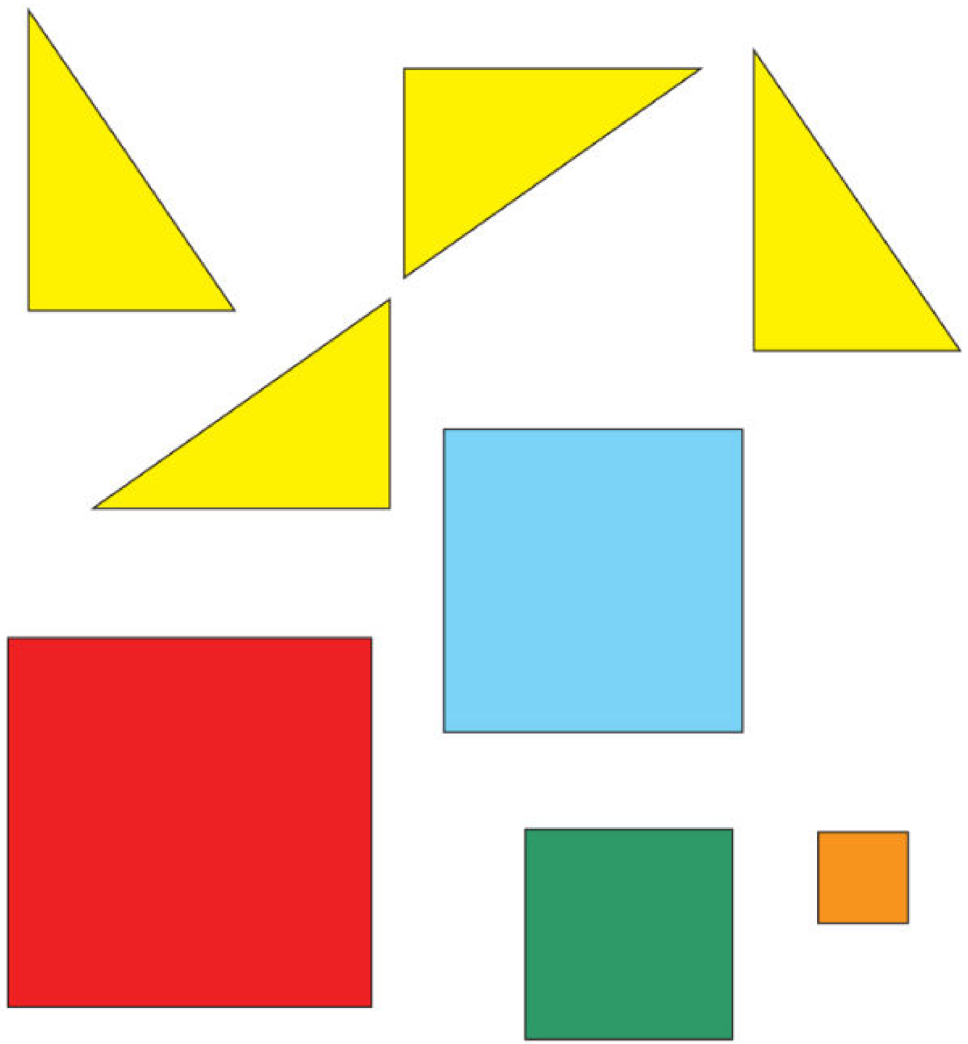
TIC

Ingresa al sitio <www.geogebratube.org/student/m24879>. Ahí encontrarás una aplicación con la que podrás elaborar diseños geométricos. Inventa algunos y comenta en equipo cómo los hiciste.

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

## Rompecabezas cuadrados

Forma equipo con algunos compañeros y reproduzcan las siguientes figuras en cartulina. Conserven las mismas dimensiones y formas.



Armen los cuadrados usando las figuras que se indican en cada caso. No deben superponer piezas ni dejar huecos. Utilicen las figuras como plantilla y dibujen los cuadrados en la siguiente página.

**Cuadrado 1.** Los cuatro triángulos amarillos y los cuadrados verde y azul.
**Cuadrado 2.** Los cuatro triángulos amarillos y el cuadrado rojo.
**Cuadrado 3.** Los cuatro triángulos amarillos y el cuadrado anaranjado.



**Cuadrado 1**

**Cuadrado 2**

Respondan lo siguiente.

a) ¿Cuál es la relación entre el cuadrado 1 y el cuadrado 2?

______________________________

______________________________

b) ¿Cuál es la relación entre el cuadrado 3 y el cuadrado rojo?

______________________________

______________________________

c) ¿Cuál es la relación entre los lados de los cuadrados azul, verde y anaranjado?

______________________________

______________________________

**Cuadrado 3**

**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

Para armar las figuras y responder los retos es conveniente que primero descubran la relación entre los lados de los cuadrados y los lados de los triángulos.

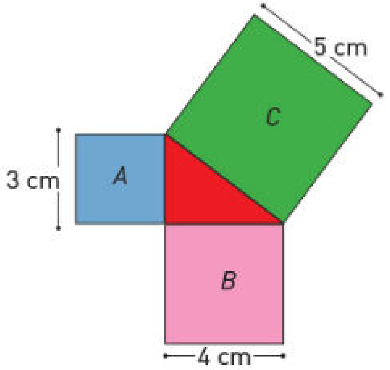
## Teorema de Pitágoras I

**PREGUNTA INICIAL**

¿Cuál es el lado mayor de un triángulo rectángulo?

**1** **Analiza las actividades que se indican y contesta en tu cuaderno.**

Dibuja un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 5 cm. Comprueba que uno de los ángulos del triángulo que construiste sea recto. Construye los cuadrados de cada lado, como se ve en la figura de la derecha, y calcula sus áreas.

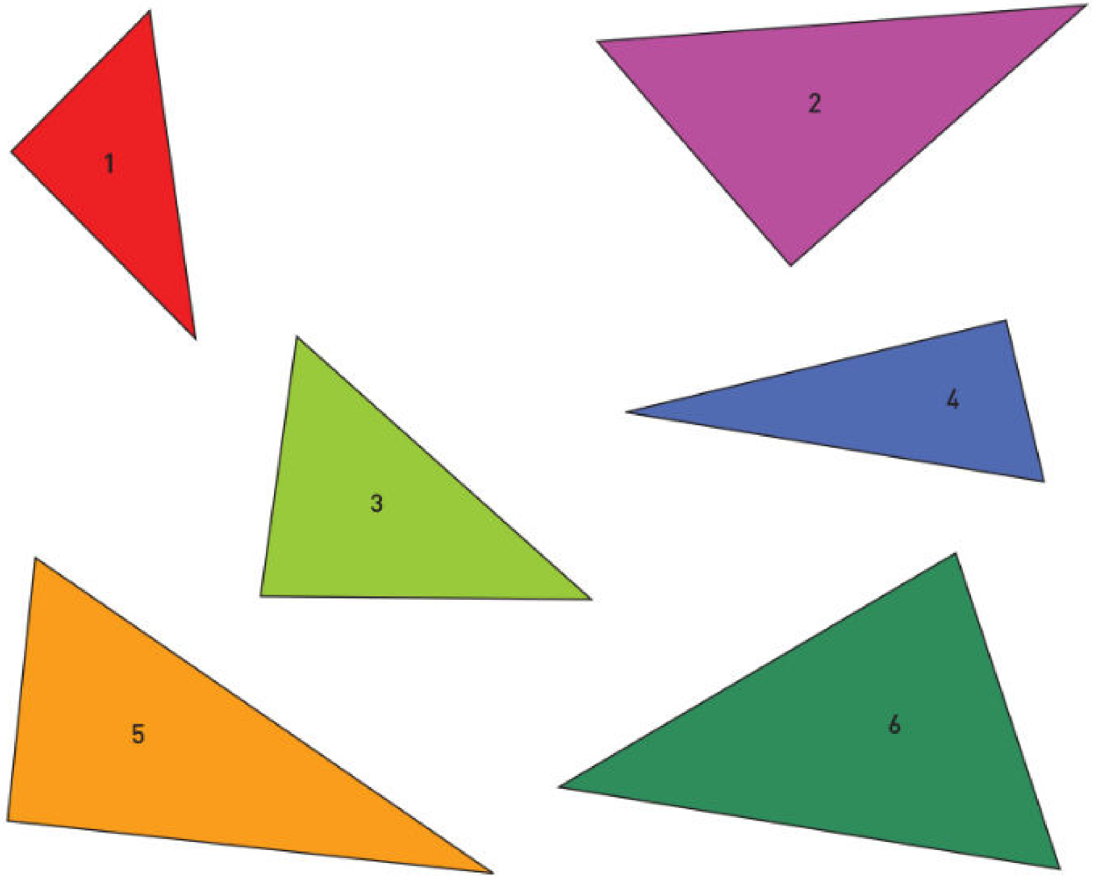



a) ¿Cuánto suman las áreas de los cuadrados *A* y *B*? ______

b) ¿Cuál es el área del cuadrado *C*? ______

c) ¿Cuál es el resultado de $C - (A + B)$? ______

**2** **Anota las medidas de los lados de los triángulos y contesta las preguntas de la siguiente página.**








a) ¿En qué triángulos se cumple que el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados?

______

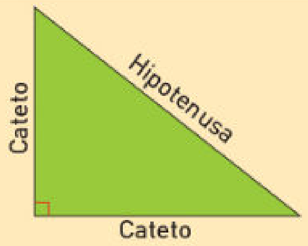
b) ¿Tienen algún ángulo recto los triángulos en los que sí se cumple esto?

______

- Comenta tus respuestas a las preguntas anteriores con tus compañeros y vean si coinciden con lo que observaron en la actividad 1.

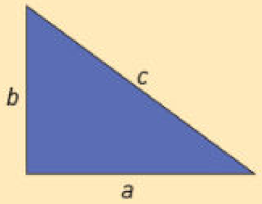
Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto.

Los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el lado opuesto a dicho ángulo se llama *hipotenusa*.



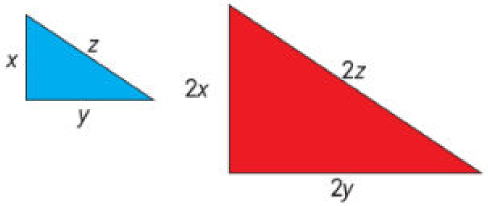

**Teorema de Pitágoras**

Establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
Considerando el triángulo de la figura se tiene que:




$$c^2 \cdot a^2 + b^2$$

**3** **Reúnete en equipo para analizar las figuras y contesten en su cuaderno.**




a) Si el triángulo azul es rectángulo, ¿el rojo también lo es? ¿Por qué?

b) Comprueben que si $x^2 + y^2 = z^2$, entonces los lados del triángulo rojo también cumplen la misma relación.

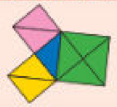
**4** **Para responder la pregunta inicial, tracen distintos triángulos en el pizarrón con ayuda de su profesor, incluyendo un triángulo rectángulo. Comprueben si se cumple en todos los casos el teorema de Pitágoras. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.**

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

## Teorema de Pitágoras II

PREGUNTA INICIAL

El triángulo azul es isósceles y rectángulo. ¿La suma de las áreas de los cuadrados chicos es igual a la del cuadrado grande? ¿Por qué?



**Observa**

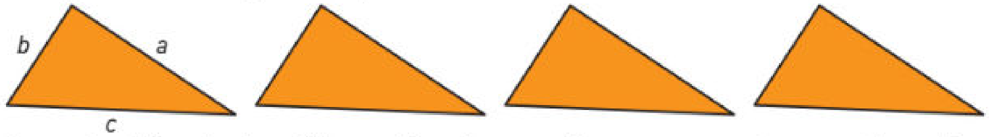
Recomendamos que leas el siguiente libro de la colección Libros del Rincón:

Ruiz, Concepción y Sergio de Régules, *Crónicas geométricas*, México, SEP-Santillana, 2002.

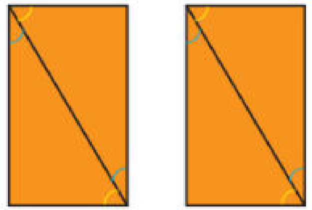
En él se aborda, entre otras cosas, la forma en que el estudio de los triángulos ha permitido a la humanidad resolver muchos problemas.

**1** **Revisa lo que hizo Yarima y contesta en tu cuaderno.**

Yarima trazó primero un triángulo rectángulo y después lo reprodujo cuatro veces. Llamó $a$ y $b$ a los catetos y $c$ a la hipotenusa.



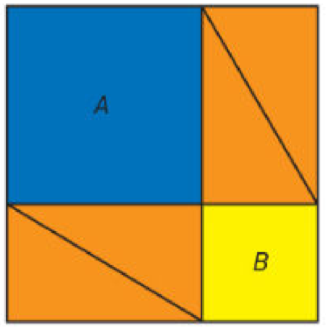

Con estos triángulos formó dos rectángulos como los que se muestran a continuación.



Observa que en cada rectángulo marcó con el mismo color los ángulos homólogos entre cada par de triángulos.

a) ¿Cuánto suman un ángulo amarillo con uno azul?

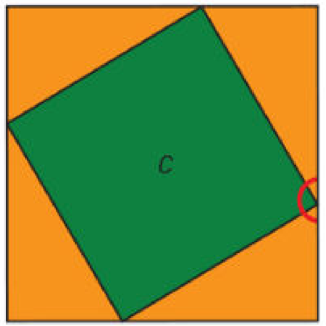
Después trazó dos cuadrados, el azul y el amarillo, y con los triángulos formó un cuadrado, como se ve en la siguiente figura.




Para las siguientes preguntas considera la relación que hay entre los cuadrados y los lados $a$, $b$ y $c$ de los triángulos trazados inicialmente por Yarima.

b) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado $A$?
c) ¿Cuál es su área?
d) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado $B$?
e) ¿Cuál es su área?
f) ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado formado por las seis figuras?

Más adelante, Yarima trazó el cuadrado $C$ y formó otro cuadrado con los triángulos.




g) ¿Cómo se puede saber, sin medir, que la figura verde es un cuadrado?
h) ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado $C$?
i) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado formado por las cinco figuras?

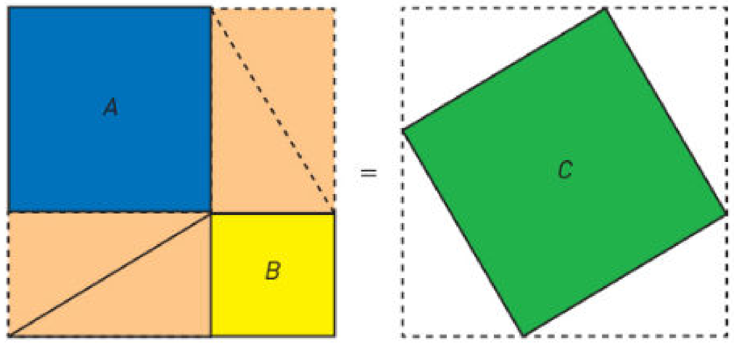




- Fíjate en que Yarima hizo dos cuadrados con la misma área; pero, si quitamos en ambos los cuatro triángulos, las áreas que quedan siguen siendo iguales.

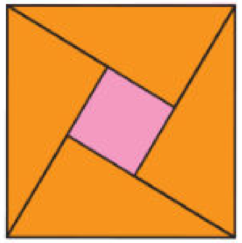
Entonces, la suma de las áreas de los cuadrados $A$ y $B$ es igual que el área de $C$.

j) Expresa la suma $A + B \cdot C$ en términos de los lados $a$, $b$ y $c$ del triángulo rectángulo.




- Comenta con tus compañeros si estas construcciones se pueden hacer con cualquier triángulo rectángulo. Verifiquen su respuesta con otros triángulos rectángulos.

**2** **Ahora analiza esta construcción de Yarima. Considera los lados $a$, $b$ y $c$ de cada triángulo.**



a) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado anaranjado? __________

b) ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado rosa? __________

c) Anota el área formada por las cinco piezas, como se indica.

| Como su lado elevado al cuadrado | | Como la suma de las áreas de las cinco figuras |
|---|---|---|
| ↓ | | ↓ |
| __________ | = | __________ |

En el siguiente espacio haz las operaciones necesarias para que conviertas la ecuación que acabas de escribir en la que expresa el teorema de Pitágoras.

Compara tu resultado con el de tus compañeros. Comenten cómo encontraron la medida del lado del cuadrado pequeño.

**3** **Para responder la pregunta inicial, en grupo y con ayuda de su profesor, desarrollen en el pizarrón un procedimiento parecido al de la actividad 2 y justifiquen su trabajo empleando la congruencia de triángulos.**

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

## Teorema de Pitágoras III

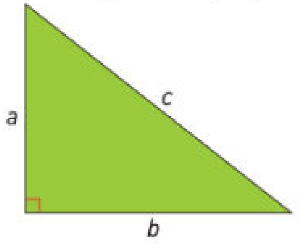
**PREGUNTA INICIAL**

Si conoces el lado de un cuadrado, ¿cómo calcularías cuánto mide su diagonal?

El teorema de Pitágoras es una de las herramientas más empleadas en los procedimientos algebraicos, por eso, en esta lección harás varios ejercicios para que reafirmes este conocimiento.

**1** Utiliza tus conocimientos algebraicos para contestar lo siguiente.

Como el siguiente es un triángulo rectángulo, tenemos que $c^2 = a^2 + b^2$.
Si no se conoce la longitud de $a$, se puede despejar de la igualdad anterior.



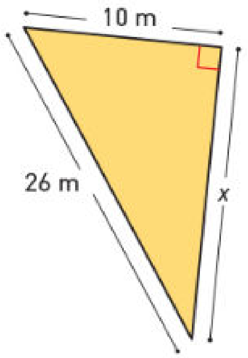

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Despeja $c$ y $b$.

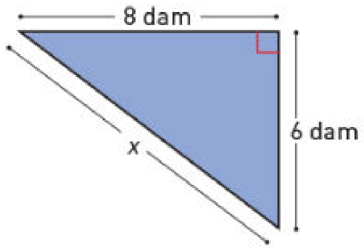
$c$ = ________ $b$ = ________

**2** **Calcula la medida del lado que falta en los siguientes triángulos rectángulos. Después contesta.**

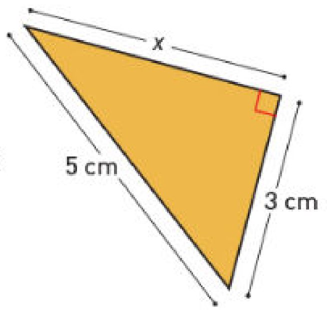
a)




b)




c)




$x$ = ____________ m $x$ = ____________ dam $x$ = ____________ cm

d) Si conoces los dos catetos de un triángulo rectángulo, ¿cómo calculas la hipotenusa?

______________________________

e) Si conoces un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, ¿cómo calculas el otro cateto? ______________________________

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y determinen qué procedimientos son los correctos.

**TIC**

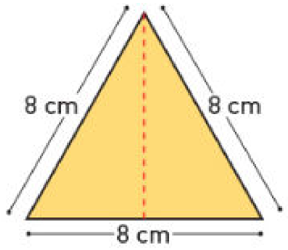
El sitio <arquimedes.matem.unam.mx/descartes.org.mx/descartes/web/materiales_didacticos/Teorema_de_Pitagoras/pitagoras.htm> presenta una sencilla explicación del teorema de Pitágoras; además, cuenta con algunos ejemplos resueltos de manera muy dinámica. Te recomendamos que lo visites.





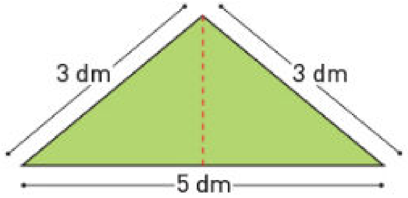
**3** Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de los siguientes triángulos; en tus resultados usa hasta dos decimales. Puedes emplear calculadora.

a)



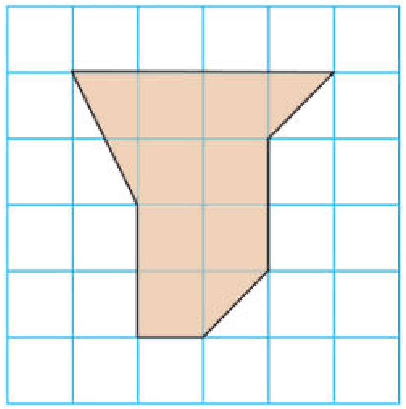

Altura = ________ cm

b)




Altura = ________ dm

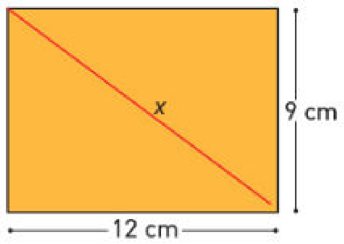
**4** Tenemos la representación aérea de un parque. Considera que el lado de un cuadro equivale a un kilómetro para que calcules el perímetro del parque. Puedes usar calculadora.



Perímetro = ____________

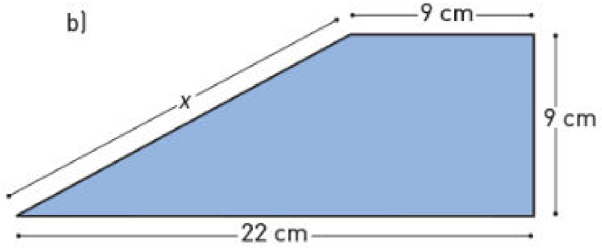
**5** Analiza las figuras y calcula las diagonales marcadas con $x$.

a)




$x$ = ________ cm

b)




$x$ = ________ cm

**6** En equipo, respondan la pregunta inicial en el pizarrón. Con ayuda de su profesor, comenten qué expresión puede emplearse para aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo en el que los dos catetos son iguales.

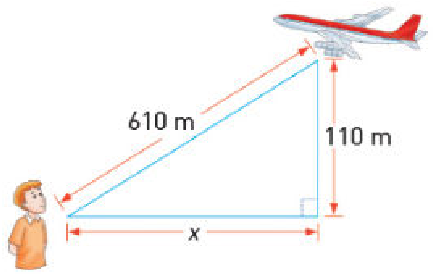
Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

## Teorema de Pitágoras IV

**PREGUNTA INICIAL**

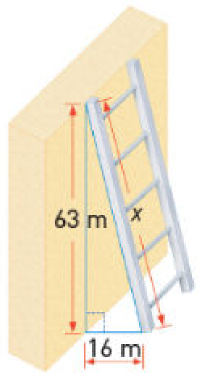
Si los lados de un triángulo miden 11 cm, 60 cm y 61 cm, ¿se trata de un triángulo rectángulo?

**1** En esta lección encontrarás varias aplicaciones de la relación catetos-hipotenusa. Analiza las situaciones, desarrolla los procedimientos en tu cuaderno y responde aquí. Usa máximo dos decimales en tus respuestas.



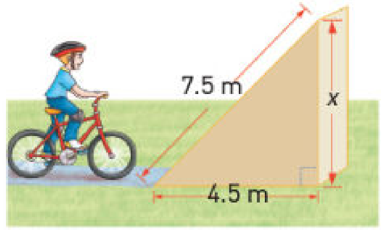

a) ¿A qué distancia horizontal se encuentra el avión respecto al joven?

Se encuentra a __________ m.



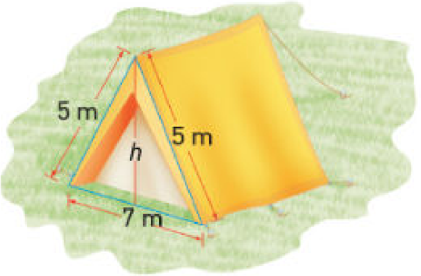

b) ¿Cuál es la longitud de la escalera?

La escalera mide __________ m.



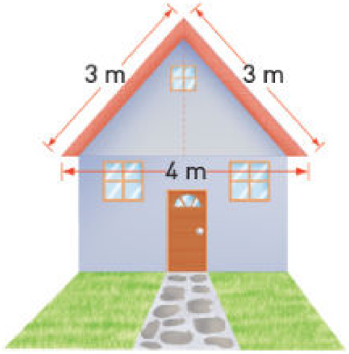

c) ¿Cuál es la altura de la rampa?

La rampa mide __________ m de altura.




d) ¿Cuál es la altura de la tienda de campaña?

La tienda mide __________ m de altura.



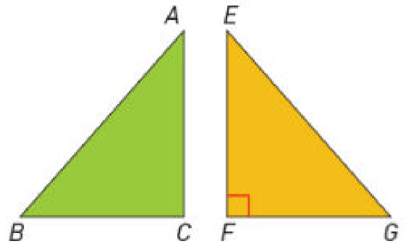

e) ¿Cuál es la altura del techo?

La altura es __________ m.





**2** Reúnete con un compañero, analicen y contesten lo siguiente.




No se sabe si el triángulo *ABC* es rectángulo, pero se conoce que sus lados cumplen lo siguiente:

$|\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2$

El triángulo $\triangle EFG$ se trazó de manera que fuera rectángulo y que sus lados cumplieran que $|\overline{EF}| = |\overline{AC}|$ y que $|\overline{FG}| = |\overline{BC}|$.

a) ¿Por qué se cumple afirmar que $\overline{EG} = \overline{AB}$? ______________________

b) ¿Por qué $\triangle ABC$ y $\triangle EFG$ son congruentes? ______________________

c) Si $\triangle ABC$ y $\triangle EFG$ son congruentes, ¿por qué se puede afirmar que el ángulo $\angle ACB$ es recto? ______________________

- Comparen sus respuestas con las de otra pareja del grupo.

El teorema de Pitágoras dice que en cualquier triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual que el cuadrado de la hipotenusa. El *recíproco* también es cierto.

**Recíproco del teorema de Pitágoras**

Si las longitudes de los lados de un triángulo son *a*, *b* y *c*, y se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

**Recuerda**

El recíproco de una afirmación no siempre es cierto. Por ejemplo: es cierto que si la figura es un cuadrado, sus lados son iguales.

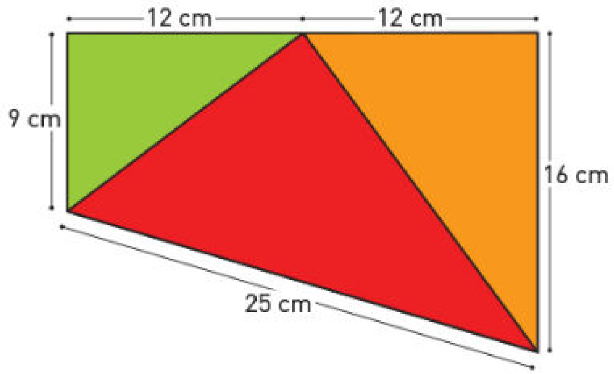
Pero no es cierto que si los lados son iguales, la figura es un cuadrado.

**3** Contesta lo siguiente en tu cuaderno.

Los triángulos verde y anaranjado son triángulos rectángulos.

a) Calcula el perímetro del triángulo rojo.

b) ¿El triángulo rojo es rectángulo? Explica por qué.




**4** Formen equipos y, organizados por su profesor, tracen en el pizarrón distintos triángulos con las medidas indicadas en la pregunta inicial, ¿lo lograron? Justifiquen su respuesta.

## Regla de la suma I

**PREGUNTA INICIAL**

¿La probabilidad de que al tirar un dado caiga un número par o un número menor que 4 es la suma de las probabilidades de los dos eventos? ¿Por qué?

Recuerda el juego de Esther y Manuel de la lección 20, página 64, en el que ellos juegan con las 28 fichas de un dominó: meten las fichas en una bolsa y sacan una al azar; si la suma de los puntos es mayor que 1 y menor que 6, gana Esther; si la suma es igual o mayor que 6, gana Manuel.

**Recuerda**
Según la definición de números pares e impares, el 0 es un número par.

**1** **Analiza los eventos que pueden suceder en el juego y contesta las preguntas.**

*A*: sacar una ficha con el mismo número en ambos lados.
*B*: sacar una ficha cuyos puntos sumen un número par.
*C*: sacar una ficha cuyos puntos sumen un número impar.
*D*: sacar una ficha cuyos puntos sumen 10.
*E*: sacar una ficha que tenga un 1.
*F*: sacar una ficha que tenga un 4.
*G*: sacar una ficha cuyos puntos sumen 8.
*H*: sacar una ficha cuyos puntos sumen 20.

a) Calcula la probabilidad de cada uno de los eventos anteriores.

$P(A)\cdot$ $P(B)\cdot$ $P(C)\cdot$ $P(D)\cdot$

$P(E)\cdot$ $P(F)\cdot$ $P(G)\cdot$ $P(H)\cdot$

b) Lee la siguiente información y efectúa en tu cuaderno lo que se pide.

La probabilidad de que suceda el evento *R* o el evento *S* o ambos se escribe *P*(*R* o *S*).
La probabilidad de que sucedan los eventos *R* y *S* al mismo tiempo se escribe *P*(*R* y *S*).

- Describe dos eventos, nómbralos *R* y *S* y anota los eventos (*R* y *S*) y (*R* o *S*). Compáralos con los de tus compañeros y decidan qué ejemplos son los correctos.

c) Dibuja las fichas del evento *A*.

d) Dibuja las fichas del evento *B*.





e) Calcula *P*(*A* o *B*). _____

f) Calcula *P*(*A* y *B*). _____

g) ¿Cómo se calcula *P*(*A* o *B*) conociendo *P*(*A*) y *P* (*B*)? _____

h) Calcula *P*(*B* y *D*). _____

i) Calcula *P*(*B* o *D*). _____

j) ¿*P*(*B* o *D*) es la suma de *P*(*B*) y *P*(*D*)? _____ ¿Por qué? _____

k) Dibuja las fichas del evento *E* o *F*.

l) Dibuja las fichas del evento *E* y *F*.

m) Calcula estas probabilidades: $P(E) + P(F)\cdot$ _____ $P(E \text{ y } F)\cdot$ _____

n) ¿Cómo calculas *P* (*E* o *F*) a partir de las dos probabilidades anteriores? _____

o) Si $P(M)\cdot\frac{1}{3}$, $P(N)\cdot\frac{1}{2}$ y $P(M \text{ y } N)\cdot\frac{1}{6}$, ¿cuánto vale *P*(*M* o *N*)? _____

p) ¿Por qué? _____

**2** **Considera el experimento de sacar una ficha de dominó al azar.**

a) Escribe dos eventos *T* y *U* que cumplan lo siguiente.

$P(T \text{ o } U)\cdot\frac{13}{28}$ $P(T \text{ y } U) = \frac{1}{28}$

*P*(*T*) _____

*P*(*U*) _____

b) Dibuja las fichas que cumplen cada evento.

c) Si consideramos los eventos cuya probabilidad suma $\frac{13}{28}$, es decir, *P*(*T* o *U*), ¿cuál es la suma de la probabilidad de que sucedan los demás eventos? _____

d) ¿Cuál es el resultado de sumar las probabilidades de todos los eventos? _____

- Comenten en grupo sus respuestas a la pregunta inicial. Revisen la relación que existe entre la probabilidad de que suceda un evento y la probabilidad del evento complementario.

**TIC**
Ingresa al sitio <www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/Temas/Buttons.htm>. Consulta la información de la regla de la suma y resuelve las actividades. Valida tus respuestas con algún compañero y comenten los procedimientos empleados.

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

## Regla de la suma II

PREGUNTA INICIAL

Escriban dos eventos complementarios *A* y *B*. Calculen $P(A \text{ y } B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \text{ o } B)$.

**1** Formen equipos de cuatro integrantes. Lean la siguiente situación y contesten las preguntas.

Una asociación de beneficencia organizó la rifa de algunos aparatos electrónicos para recabar fondos para apoyar sus labores altruistas.

El total de los boletos fue de 200; los premios se repartieron de la siguiente manera: 15 pantallas planas, 20 minicomponentes, 15 videocámaras, 25 teléfonos celulares, 15 tabletas y 10 relojes (los demás boletos no tenían premio).

a) Escribe la probabilidad que hay de ganar uno de los aparatos rifados.

Pantalla: ____________ Minicomponente: ____________

Videocámara: ____________ Teléfono celular: ____________

Tableta: ____________ Reloj: ____________

b) ¿Qué probabilidad de ganar algún premio tiene una persona que compró un boleto? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar una tableta o un reloj? Subraya tu respuesta.

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{8}$

d) ¿Cuál es la probabilidad de ganar una pantalla o una tableta? Subraya tu respuesta.

$\frac{3}{20}$ $\frac{5}{20}$ $\frac{7}{20}$ $\frac{9}{20}$

e) Si una familia compró cinco boletos, ¿qué probabilidad existe de que no ganen nada? Justifiquen su respuesta en el cuaderno. ____________

f) Recuerden el concepto de eventos complementarios y escriban la probabilidad del complementario de no ganar nada. ____________

g) Escriban en el cuaderno tres combinaciones de eventos en los que la suma de sus probabilidades de ocurrir sea $\frac{9}{40}$.

h) ¿Qué eventos coinciden con la suma de probabilidades $\frac{15}{200} + \frac{20}{200}$? Escriban las distintas opciones.

i) ¿La probabilidad de ganar un minicomponente o un teléfono celular es mayor, menor o igual respecto a la probabilidad de ganar una pantalla, una videocámara o una tableta? ________ Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

j) ¿Cuántos eventos forman el espacio muestral para esta rifa? ____________

- Comparen sus respuestas con las que obtuvieron otros equipos, identifiquen si son eventos mutuamente excluyentes y cuáles son complementarios de otros.





**2** Consideren, también en equipo, los datos de la actividad 3. Completen la siguiente tabla con las distintas posibilidades de obtener premios en la rifa mencionada.

| | Suma de probabilidades | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pantalla | Minicomponente | Videocámara | Teléfono celular | Tableta | Reloj | Sin premio |
| Pantalla | $\frac{15}{200}$ | | | | | | |
| Minicomponente | | $\frac{20}{200}$ | | | | | |
| Videocámara | | $\frac{15}{200} + \frac{20}{200}$ | $\frac{15}{200}$ | | | | |
| Teléfono celular | | | | | | | |
| Tableta | | | | | | | |
| Reloj | | | | | | $\frac{1}{20}$ | |
| Sin premio | | | | | | | $\frac{1}{2}$ |

**3** Para responder la pregunta inicial de esta lección, analicen con ayuda de su profesor la siguiente información; contesten las preguntas y escriban sus conclusiones al final.

*Regla de la suma*. Si dos eventos *A* y *B* son mutuamente excluyentes, esto es, que no suceden al mismo tiempo, la probabilidad de que suceda *A* o de que suceda *B* es igual a la suma de sus probabilidades:

$$P(A \text{ o } B) \cdot P(A) + P(B)$$

a) ¿Cómo se calcula $P(A \text{ o } B)$ conociendo $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \text{ y } B)$? ____________

b) ¿En qué caso sucede que $P(A \text{ o } B) \cdot P(A) + P(B) \cdot 1$? ____________

c) ¿Cómo se calcula $P(A \text{ y } B)$ conociendo $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \text{ o } B)$? ____________

Conclusiones: ____________

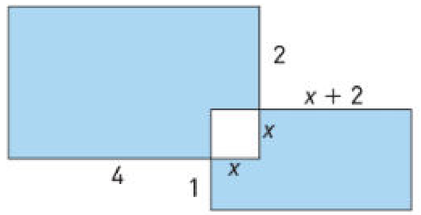
Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Analiza las siguientes preguntas y subraya la respuesta correcta.

**1** El área de un rectángulo es $2x^2 - 14x + 24$. Si uno de sus lados mide $x - 3$, ¿cuánto mide el otro?

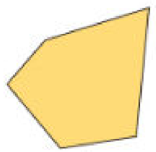
a) $2(x + 8)$ b) $2(x - 4)$ c) $2(x - 3)$ d) $2(x + 4)$

**2** ¿Cuál es el área de la zona sombreada en la figura?

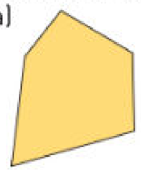


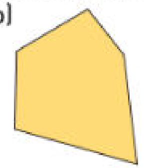

a) $9x^2 + 2x$ b) $2x^2 + 10x + 10$
c) $x^2 + 10x + 10$ d) $x + 10$

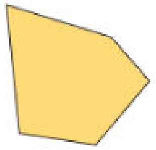
**3** Dada la siguiente figura...

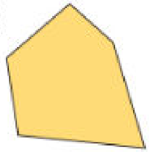


Determina cuál de las siguientes corresponde a una rotación de 260˚.

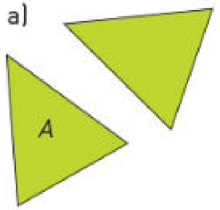
a)


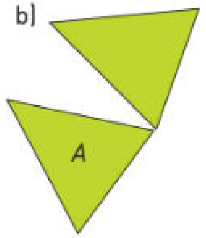
b)


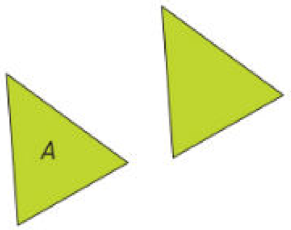
c)


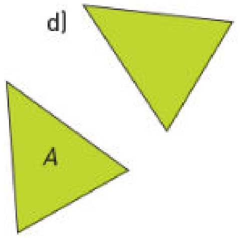
d)


**4** ¿En qué opción se muestra una traslación de la figura $A$?

a)


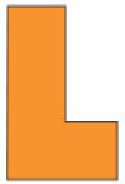

b)



c)


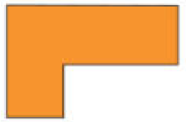

d)


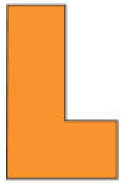


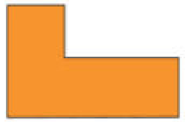

**5** Dada la figura...

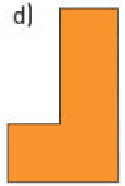


¿Qué opción muestra una simetría axial combinada con una rotación de la figura anterior?

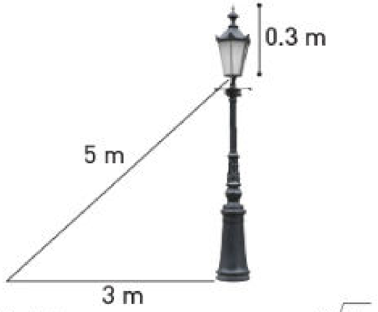
a)


b)


c)


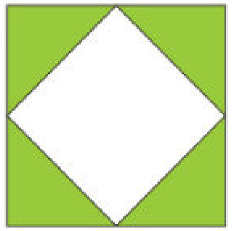
d)


**6** Una lámpara se encuentra sostenida a 3 m de distancia por una cuerda de 5 m. Con base en los datos de la siguiente figura, ¿cuál es la altura total de la lámpara?




a) 4 m b) 4.3 m c) $\sqrt{34}$ m d) 8 m

**7** En la figura, los vértices del cuadrado pequeño coinciden con los puntos medios del cuadrado mayor. Si el lado del cuadrado mayor mide 15 cm, ¿cuánto mide el perímetro del menor?



a) 42.42 cm b) 112.5 cm c) 30 cm d) 60 cm

**8** Federico atravesará tres veces un campo de futbol corriendo por una de sus diagonales. Si el campo mide 95 m de largo y 50 m de ancho, ¿qué distancia recorrerá?

a) 322 m b) 346 m c) 400 m d) 275.74 m

**9** ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal mide $2x^2$?

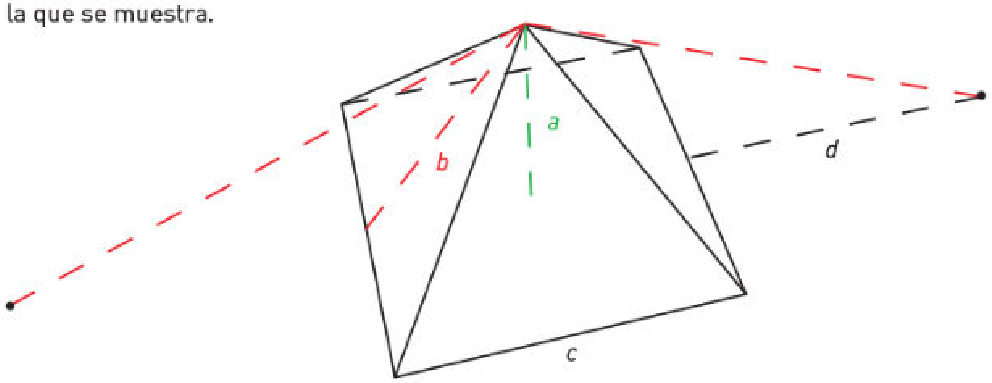
a) $x^2$ b) $4x^2$ c) $x^4$ d) $4x^4$

**10** En una urna hay 100 pelotas numeradas del 1 al 100. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una pelota su número tenga alguna cifra cinco o cero?

a) $\frac{20}{100}$ b) $\frac{27}{100}$ c) $\frac{28}{100}$ d) $\frac{29}{100}$

**Lee la información y responde lo que se pide.**

El ingeniero Marván diseñó una tienda de campaña piramidal con base cuadrada, como la que se muestra.




La altura de la tienda sobre el piso ($a$) es 2 m y cada lado de la base ($c$) mide 2.8 m. Las caras laterales son de tela de algodón; para el piso se usó lona de PVC.

**Pregunta 1.** Estima cuántas personas adultas pueden dormir en la tienda y explica cómo lo calculaste. ______________________________

______________________________

______________________________

**Pregunta 2.** Explica cómo determinar el área de una cara lateral.

______________________________

______________________________

______________________________

**Pregunta 3.** ¿Qué ecuación relaciona correctamente la altura de la tienda ($a$), la altura de una cara triangular ($b$) y la medida de un lado de la base ($c$)?

a) $a^2 + b^2 \cdot c^2$ b) $a^2 + c^2 \cdot b^2$ c) $a^2 + (\frac{b}{2})^2 \cdot c^2$ d) $a^2 + (\frac{c}{2})^2 \cdot b^2$

**Pregunta 4.** ¿Qué cantidad de cada material (tela y lona) se requiere para fabricar la tienda? ______________________________

______________________________

______________________________

**Pregunta 5.** Para sostener la tienda se usarán cuerdas de 3.5 m. ¿A qué distancia de la tienda ($d$) deben colocarse las argollas sobre el piso? ______________________________

______________________________





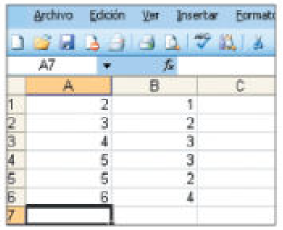
## TIC. Ternas pitagóricas en la hoja de cálculo

Una *terna pitagórica* son tres enteros positivos ($a$, $b$ y $c$) que cumplen $a^2 + b^2 \cdot c^2$, por ejemplo: 3, 4 y 5, pues $3^2 + 4^2 \cdot 5^2$; también 5, 12 y 13, porque $5^2 + 12^2 \cdot 13^2$.

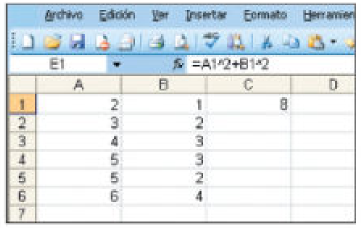
Los griegos descubrieron que las ternas pitagóricas son de la forma $2xy$, $x^2 - y^2$ y $x^2 + y^2$. Donde $x$ y $y$ son números enteros y $x > y$.

**Para generar ternas pitagóricas, abre tu hoja de cálculo y haz lo siguiente.**

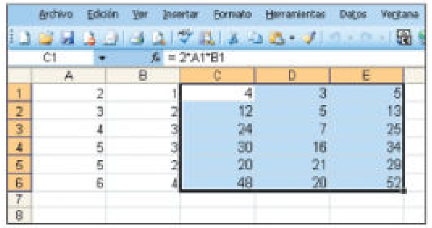
1. Introduce parejas de valores en las columnas A y B. Los valores de la columna A deben ser mayores que los correspondientes de la columna B.



2. En la celda C1 anota: · 2 * A1 * B1; en la celda D1: · A1 ^ 2 – B1 ^ 2; y en la celda E1: · A1 ^ 2 + B1 ^ 2.



3. Selecciona las celdas C1, D1 y E1. Luego haz clic en el cuadro inferior derecho y arrástralo hasta la última fila donde introdujiste los datos. Las ternas pitagóricas aparecerán en las columnas C, D y E.



**Para que practiques lo aprendido aquí, grafica en una hoja de cálculo los datos que obtuviste en las encuestas que elaboraste en las lecciones anteriores.**

## Autoevaluación

**Analiza tu desempeño respecto a los aprendizajes esperados del bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.**

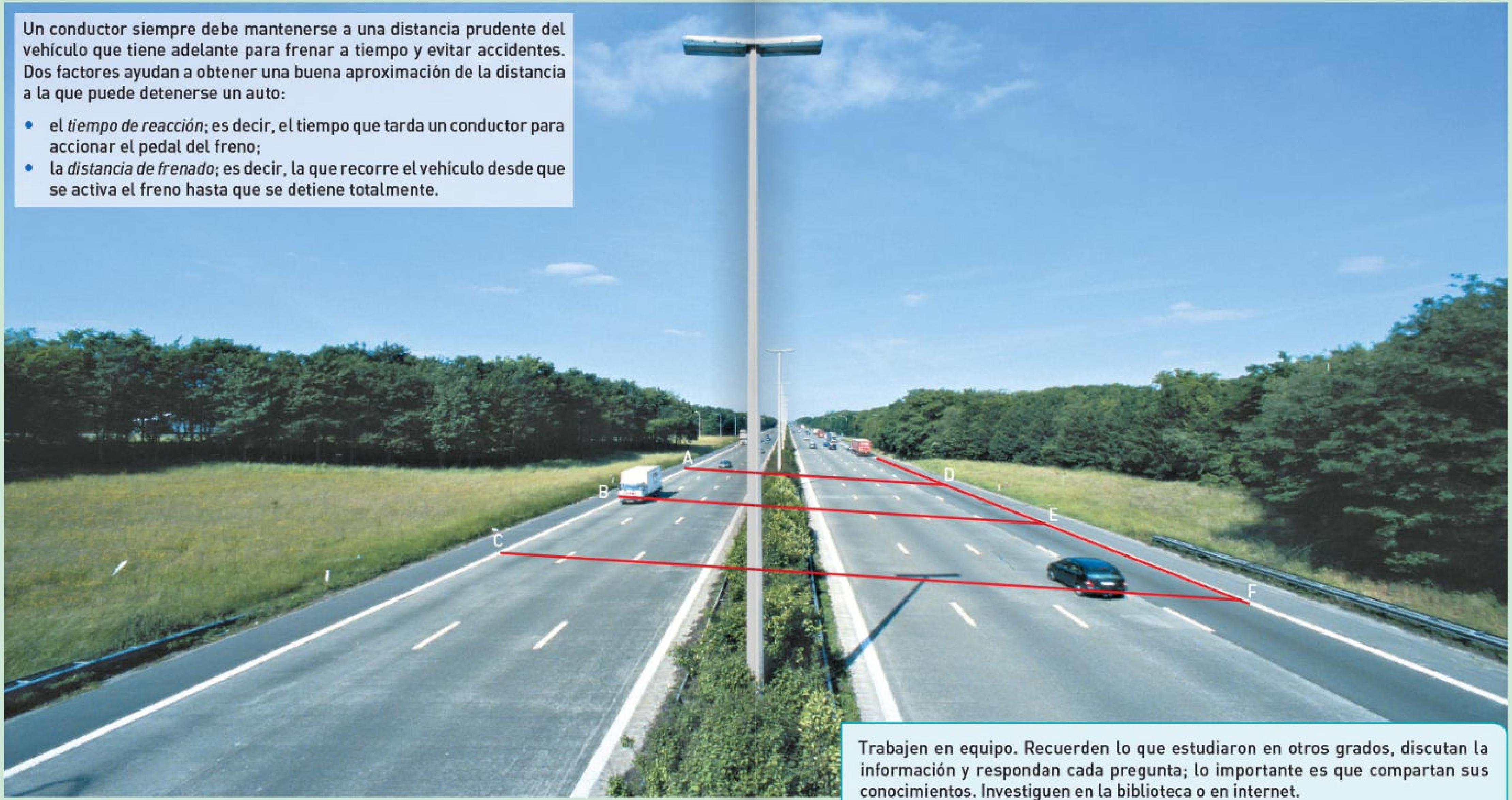
| | Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos | Lo hago solo | Lo hago con ayuda de otros | Necesito la ayuda del profesor |
|---|---|---|---|---|
| Explicar el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. | | | | |
| Identificar las propiedades que se conservan en una reflexión, rotación o traslación. | | | | |
| Resolver problemas por medio del uso del teorema de Pitágoras. | | | | |

**Comenta con el profesor tus avances y dificultades.**

# BLOQUE 3

Un conductor siempre debe mantenerse a una distancia prudente del vehículo que tiene adelante para frenar a tiempo y evitar accidentes. Dos factores ayudan a obtener una buena aproximación de la distancia a la que puede detenerse un auto:

- el *tiempo de reacción*; es decir, el tiempo que tarda un conductor para accionar el pedal del freno;
- la *distancia de frenado*; es decir, la que recorre el vehículo desde que se activa el freno hasta que se detiene totalmente.




## Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Trabajen en equipo. Recuerden lo que estudiaron en otros grados, discutan la información y respondan cada pregunta; lo importante es que compartan sus conocimientos. Investiguen en la biblioteca o en internet.

**1** Un automóvil circula a 100 km/h en una carretera. El tiempo de reacción del conductor es de $\frac{3}{4}$ s y la distancia de frenado, en metros, se calcula dividiendo el cuadrado de la velocidad entre la cantidad constante 175.

a) Si la velocidad es de 100 km/h, ¿qué distancia (en metros) recorre el automóvil antes de detenerse a partir de que el conductor ve un obstáculo?

b) ¿A qué velocidad máxima debe conducir el automovilista si quiere detenerse en menos de 65 m a partir de que ve un obstáculo?

**2** Si en la fotografía $|\overline{AB}|$ es $\frac{3}{4}$ de $|\overline{BC}|$, ¿qué relación guardan $|\overline{DE}|$ y $|\overline{EF}|$?

## Un pastel muy funcional

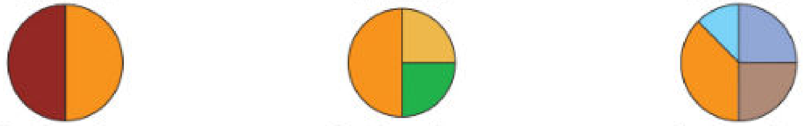
**Analiza la siguiente historia y lleva a cabo las actividades indicadas.**

Una tarde de sábado, un grupo de alumnos de tercer grado de secundaria celebraban un cumpleaños. Al partir el pastel, Martín, amante de las matemáticas, planteó a sus compañeros algunas dudas que le surgieron y dijo:

—Oigan, ¿cuál es el número máximo de rebanadas que se puede obtener con un corte? ¿Y con dos cortes? ¿Y con tres? ¿Y con cuatro?

Julia hizo rápidamente los siguientes dibujos.

Un corte — 2 cortes — 3 cortes



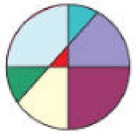
2 rebanadas — 3 rebanadas — 4 rebanadas

Roberto dijo que se obtendrían más rebanadas si los cortes se hacían cruzando todo el pastel e hizo los siguientes dibujos.

Un corte — 2 cortes — 3 cortes — 4 cortes

2 rebanadas — 4 rebanadas — 6 rebanadas — 8 rebanadas

—Pero creo que con tres cortes se pueden obtener siete rebanadas —dijo Andrea—, y mostró el dibujo de la derecha.



—Sí —dijo Martín—, no importa que las rebanadas sean de distinto tamaño.

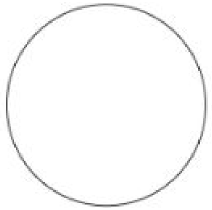
Después, Martín mostró un dibujo según el cual se obtenían 11 rebanadas con cuatro cortes.

**Resuelve los retos que se proponen a continuación.**

a) ¿Cuántas rebanadas se pueden obtener con cinco cortes?
b) ¿Y con seis? ¿Y con siete? ¿Y con $x$ cortes?
c) ¿Cuál es el número mínimo de cortes que necesitas hacer para obtener 106 rebanadas?

**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

Dibuja en el círculo los cuatro cortes que hizo Martín para obtener 11 rebanadas. Después, haz otro corte que divida al círculo en el mayor número de sectores posible.





**Lee la continuación de la historia para que resuelvas los otros retos.**

El lunes siguiente, después de la reunión, los alumnos le plantearon el problema al profesor de matemáticas.

—Veamos —contestó el profesor—, ¿cuánto han investigado?

Sabemos que con cero cortes se tiene una rebanada, es decir, el pastel completo; con dos cortes, cuatro rebanadas; con cuatro, 11 rebanadas... —dijo Julia.

—Muy bien —comentó el profesor—. Este problema lo conozco: el número de rebanadas está determinado por el número de cortes y la relación se puede establecer con una ecuación de segundo grado.

**Efectúa las siguientes actividades.**

a) Completa la siguiente tabla.

| Número de cortes | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de rebanadas | 1 | 2 | 4 | | | |

b) Analiza el planteamiento y completa lo que se pide.

Una expresión algebraica de segundo grado tiene la forma $ax^2 + bx = 0$. Entonces, si llamamos $y$ al número de rebanadas y $x$ al número de cortes, según el profesor, deberíamos establecer la relación $y = ax^2 + bx + c$. Sabemos que cuando $x = 0$, $y$ debe ser igual a 1; es decir, se establece la ecuación:

$$1 = a(0)^2 + b(0) + c$$

Por lo anterior, tenemos que $c = 1$. Entonces la ecuación buscada es $y = ax^2 + bx + 1$.

Por otro lado, sabemos que cuando $x$ vale 1, $y$ debe valer 2, así que sustituimos estos valores en la ecuación.

$$2 = a(1)^2 + b(1) + 1 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Esta ecuación puede transformarse en:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0 \qquad (1)$$

También sabemos que cuando $x$ vale 2, $y$ vale 4. Al sustituir tenemos:

$$4 = a(2)^2 + b(2) + 1 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

La ecuación puede transformarse en:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0 \qquad (2)$$

**Observa que (1) y (2) son un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Resuélvelo y encuentra los valores de $a$ y $b$. Una vez que los tengas, usa la ecuación para resolver los retos que se plantearon.**

## Fórmula general I

**PREGUNTA INICIAL**

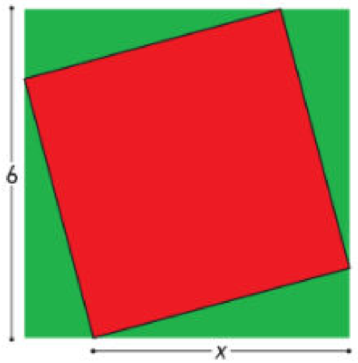
¿Se puede despejar $x$ en la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$?

**1** **Analiza la información y haz lo que se indica.**

La siguiente figura muestra la vista aérea de una universidad. El cuadrado rojo representa el área de edificios y se encuentra inscrito en el terreno total que ocupa la escuela. Los triángulos verdes son jardines. Las medidas están dadas en kilómetros.

a) Sugiere una expresión que represente cada lado de los triángulos verdes.

______________________________




b) Calcula el área de los jardines para los siguientes valores de $x$.

| $x$ | Área de la región verde |
|---|---|
| 1 | |
| 1.5 | |
| 2 | |
| 2.5 | |
| 3 | |

c) ¿Cuánto miden los catetos de los triángulos verdes? ______________

d) ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado rojo? ______________

e) Reúnete con un compañero y escriban una expresión algebraica para calcular el área de la región verde en términos de $x$.

$A =$ ______________

f) Comprueben que con su expresión obtengan los mismos resultados que evaluaron en la tabla del inciso b). De no ser así, verifiquen sus cálculos o corrijan la ecuación.

g) Analicen la siguiente información e identifiquen cuántas incógnitas tiene la fórmula.

**Recuerda**

El teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$, donde $a$ y $b$ son los catetos y $c$ es la hipotenusa.

La *forma general de una ecuación de segundo grado* es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde $a$, $b$ y $c$ son constantes; además $a$ es distinto de cero y $c$ es un término independiente de la variable $x$.

h) Supongan que el área de la región roja es 25. Sustituyan $A$ por 25 en la expresión del inciso e), y usen sus conocimientos de álgebra para que la conviertan a la forma $ax^2 + bx + c = 0$. ______________

i) Con ayuda de su profesor, comparen su ecuación con la que escribieron las demás parejas del grupo. Verifiquen cuáles son correctas.





j) ¿Cuál debe ser el valor de $x$ para que el área de la región roja sea 25? Usen la ecuación que anotaron en el inciso e). (Hay dos soluciones.)

$x_1 =$ ______________ $x_2 =$ ______________

Antes resolviste ecuaciones de segundo grado usando el tanteo o la factorización. Sin embargo, no siempre es sencillo factorizar para resolver una ecuación de segundo grado; para ello, se puede despejar $x$.

Al despejar $x$ en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se obtiene la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión anterior se denomina *fórmula general de la ecuación de segundo grado.*

En la fórmula aparece el signo $\pm$, éste indica que se toman ambos valores de la raíz cuadrada, el positivo y el negativo.

La soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**2** **Reúnete con un compañero y observen cómo se utiliza la fórmula general para solucionar la ecuación $8x^2 - 2x - 3 = 0$. Después desarrollen en su cuaderno el mismo procedimiento y discutan la razón de cada paso.**

En este caso, $a = 8$, $b = -2$ y $c = -3$. Entonces:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(8)(-3)}}{2(8)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-96)}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{100}}{16} = \frac{2 \pm 10}{16}$$

Entonces, las soluciones son: $x_1 = \frac{2 + 10}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ $\quad x_2 = \frac{2 - 10}{16} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$

a) Desarrollen en su cuaderno el mismo procedimiento y discutan la razón de cada paso.

b) Comprueben que los valores encontrados son soluciones de la ecuación $8x^2 - 2x - 3 = 0$.

**3** **Utiliza la fórmula general para resolver en el siguiente espacio la ecuación planteada en el inciso e) de la actividad 1.**

**4** **Para responder la pregunta inicial en grupo, tomen la ecuación $x^2 \cdot 6x \cdot 5 = 0$ y pasen el término independiente al lado derecho de la ecuación, después factoricen el lado izquierdo y despejen $x$. Comprueben los valores obtenidos.**

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

## Fórmula general II

PREGUNTA INICIAL

¿La ecuación $x^2 + 5 = 0$ tiene solución? ¿Por qué?

**1** Resuelve las siguientes ecuaciones con la fórmula general. Dos de ellas carecen de solución, identifícalas. Contesta en tu cuaderno las preguntas.

**Recuerda**

Un número negativo no tiene raíz cuadrada. En cambio, un número positivo tiene una raíz cuadrada positiva y una negativa.

a) $25x^2 + 10x + 1 = 0$

$x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

b) $x^2 - 69x - 1260 = 0$

$x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

c) $7x^2 + 3x + 3 = 0$

$x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

d) $15x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

e) $x^2 + 2x + 3 = 0$

$x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

f) $24x^2 - 14x - 3 = 0$

$x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

g) $4x^2 + 4x - 3 = 0$

$x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

h) ¿Qué ecuaciones tuvieron una solución?
i) ¿Por qué esas ecuaciones solamente tuvieron una solución?
j) ¿Qué ecuaciones tuvieron dos soluciones?
k) ¿Por qué esas ecuaciones tuvieron dos soluciones?
l) ¿Qué ecuaciones no tuvieron solución?
m) ¿A qué se debió que las ecuaciones no tuvieran solución?

- Compara tus respuestas con las de un compañero, si hay errores, corríjanlos.





**2** Lee la siguiente información y verifica que los discriminantes y las soluciones de las ecuaciones de la actividad 1 cumplan con lo que se enuncia en el recuadro.

La expresión $b^2 - 4ac$ de la fórmula general se llama *discriminante de la ecuación*.
Si el *discriminante es positivo*, la ecuación de segundo grado tiene *dos soluciones*.
Si el *discriminante es cero*, la ecuación tiene *una solución*.
Si el *discriminante es negativo*, la ecuación *no tiene solución real*.

**3** Expresa las ecuaciones en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, calcula el discriminante y determina, sin resolverlas, qué ecuaciones tienen una, dos o ninguna solución. Observa que en algunos casos $b = 0$ o $c = 0$.

| Ecuación | Ecuación ordenada | Discriminante ($b^2 - 4ac$) | Número de soluciones |
|---|---|---|---|
| a) $3x(x - 1) = 0$ | | | |
| b) $4x^2 = -3x$ | | | |
| c) $2 + 7x = 4x^2$ | | | |
| d) $5x^2 - 3 = 14x$ | | | |
| e) $-x^2 - 16 = 0$ | | | |
| f) $5x(x - 2) = 3x$ | | | |
| g) $-3x^2 = -4x + 5$ | | | |
| h) $2x^2 + x = -2$ | | | |
| i) $x^2 + 9 = 6x$ | | | |
| j) $5 = 3x^2 + 4x$ | | | |

**4** Analiza las siguientes preguntas y contéstalas.

a) En la ecuación $x^2 + bx + 25 = 0$, una solución es $x = -5$. ¿Cuánto vale $b$? $b =$ ______

b) Con ese valor de $b$, ¿la ecuación tiene otra solución? ________________

**5** Factoriza las ecuaciones en tu cuaderno.

a) $20x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $35x^2 + 31x + 6 = 0$
c) $25x^2 - 30x + 9 = 0$ d) $40x^2 - x - 6 = 0$

- Reúnete con un compañero para que discutan cómo se factoriza una ecuación de segundo grado si se conocen sus soluciones. Resuelvan un ejemplo en su cuaderno.

**6** Respondan en grupo la pregunta inicial considerando el concepto de discriminante. Organizados por su profesor, justifiquen algebraicamente su respuesta y discutan sus conclusiones.

**TIC**

Ingresa al sitio <www.geogebratube.org/student/m13276>. Ahí conocerás una interpretación geométrica del número de soluciones de una ecuación cuadrática. En equipo, expliquen en qué consiste esta interpretación.

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

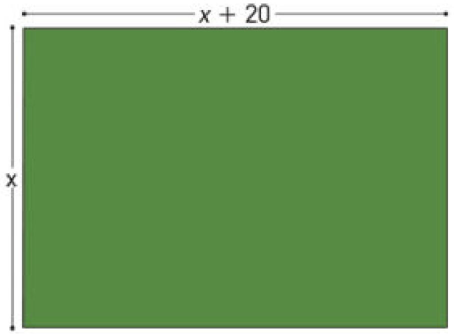
## Fórmula general III

PREGUNTA INICIAL

¿Qué problema se puede resolver con la ecuación $x^2 + 3x = 10$?

**1** Forma equipo con cuatro compañeros para resolver los problemas.

a) Un campo rectangular mide 3 149 m² de superficie. Si de largo tiene 20 metros más que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones del campo?

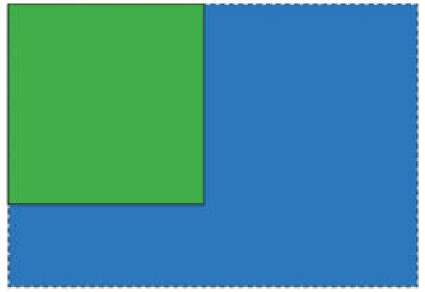



Las dimensiones son ________ m de largo y _______ m de ancho.

**Observa**

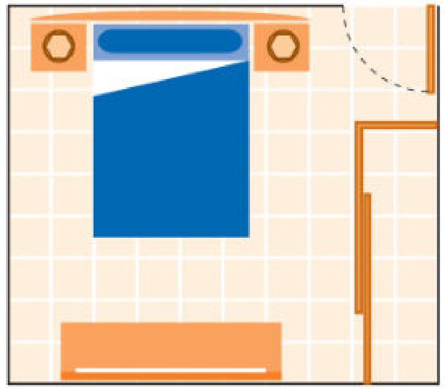
Hay un libro que pertenece a la colección Libros del Rincón que contiene muchos problemas matemáticos relacionados con la vida cotidiana, como los que se te pide resolver en esta lección. Te recomendamos leerlo:
De la Peña, José Antonio, *Números para contar, medir, crear y soñar*, México, SEP-Santillana, 2006.

b) Si se aumentan 3 cm a un lado de un cuadrado y 8 cm al otro, el área del rectángulo resultante es 162.75 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



Mide _______ cm.

c) La superficie de una habitación rectangular mide 48.75 m² y el perímetro, 14 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la habitación?

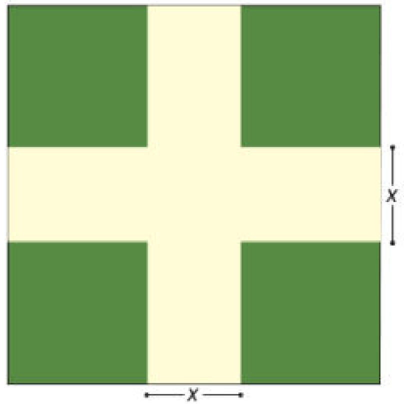


La habitación mide __________ m de largo y ________ m de ancho.



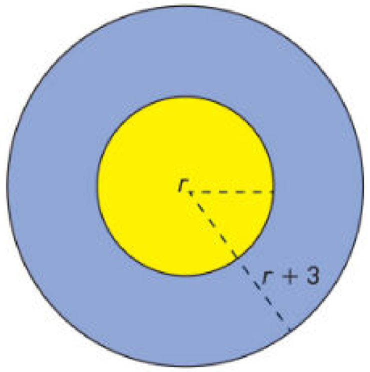


d) Un parque cuadrado mide 96 m por lado. Se desea construir un andador como el que se ve en la figura. ¿Cuánto debe medir el ancho del andador para que su área sea igual a la de la superficie con pasto?




El ancho debe medir __________ m.

e) Si el radio de un círculo aumenta 3 cm, su área se cuadruplica. ¿Cuál es el radio del círculo original?




El radio del círculo es ________ cm.

f) Se tienen varios mosaicos cuadrados. Si se forma con ellos un cuadrado de $x$ mosaicos de lado, sobran 27; si se toman $x + 1$ mosaicos para cada lado, faltan 40. ¿Cuántos mosaicos son?

Son ________________ mosaicos.

- Con ayuda de su profesor, comparen sus respuestas y estrategias de solución con las de los demás equipos del grupo. Discutan la utilidad de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y registren sus conclusiones.

**2** Plantea y resuelve con un compañero una ecuación para el inciso a) de la página 117.

El automóvil recorre _________ m antes de detenerse.

**3** Para responder la pregunta inicial, formen equipos de tres integrantes. Consideren que $x^2 \cdot 3x = 10$ puede factorizarse con $(x \cdot 5)(x \cdot 2) = 0$. Después intercambien sus problemas con los de otros equipos y resuélvanlos.

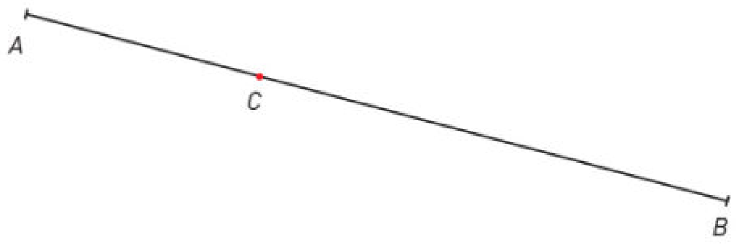
Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

## Tales segmentos divididos en tales razones

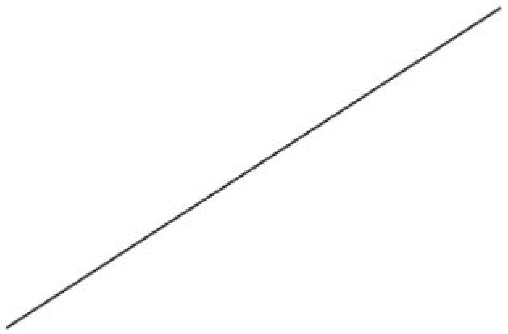
Recuerda el concepto de razón para que hagas las actividades siguientes.

a) Observa el segmento $|\overline{AB}|$; el punto $C$ lo divide en la razón $\frac{2}{3}$, porque $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{2}{3}$.

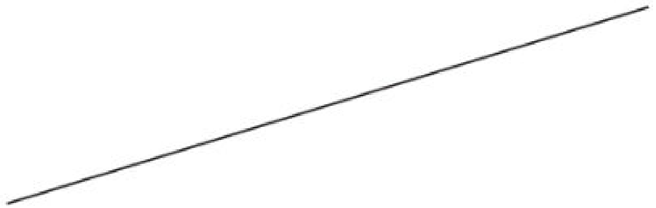
b) Comprueba, usando tu compás, que $|\overline{CB}| = 2|\overline{AC}|$.




c) Divide el segmento en la razón $\frac{2}{5}$.



d) Divide el segmento en la razón $\frac{5}{8}$.

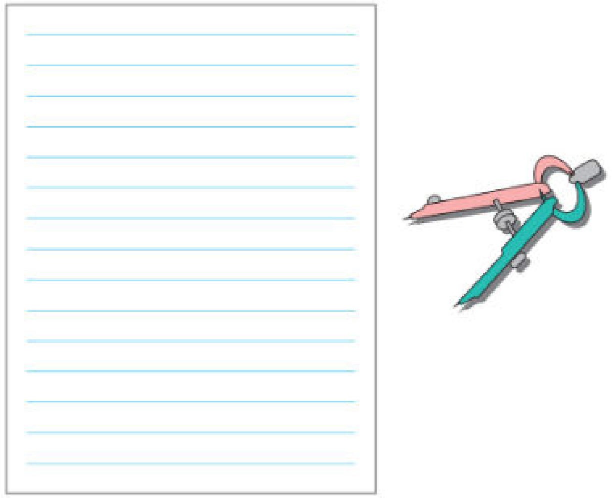




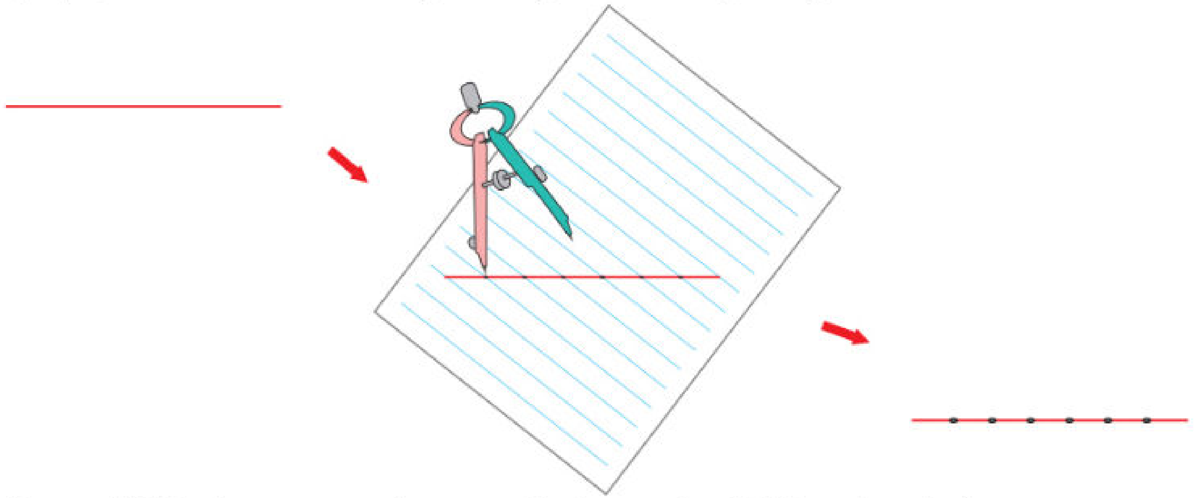
**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

Emplea una hoja de papel traslúcido, como el albanene, o de un material transparente, como el celofán o el hule cristal, para hacer las actividades siguientes.

a) Con plumín, calca las líneas de una hoja rayada normal de manera que tu hoja quede como se muestra en la siguiente imagen.



b) Ahora usa la hoja que elaboraste para dividir un segmento en las partes iguales que desees. Para hacerlo, coloca tu hoja sobre el segmento, de manera que las líneas lo dividan en las partes que necesitas. Utiliza la punta del compás para marcarlo. Por ejemplo, observa cómo se divide el siguiente segmento en siete partes iguales.



Una vez dividido el segmento en siete partes iguales, puedes dividirlo en la razón $\frac{2}{5}$. ¿Cómo?

c) Traza un segmento en tu cuaderno y pídele a un compañero que lo divida en la razón que le indiques.

# Lección 42



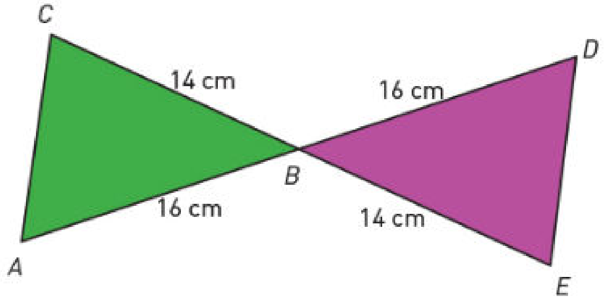
## Congruencia de triángulos

PREGUNTA INICIAL

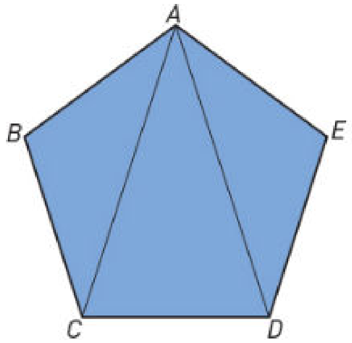
¿Los triángulos isósceles o equiláteros pueden dividirse en dos triángulos congruentes por una de sus alturas? Y si un triángulo queda dividido en dos triángulos congruentes por una de sus alturas, ¿entonces es isósceles o equilátero?

**1** Determina si los siguientes triángulos son congruentes. Responde en tu cuaderno y justifica tus respuestas.

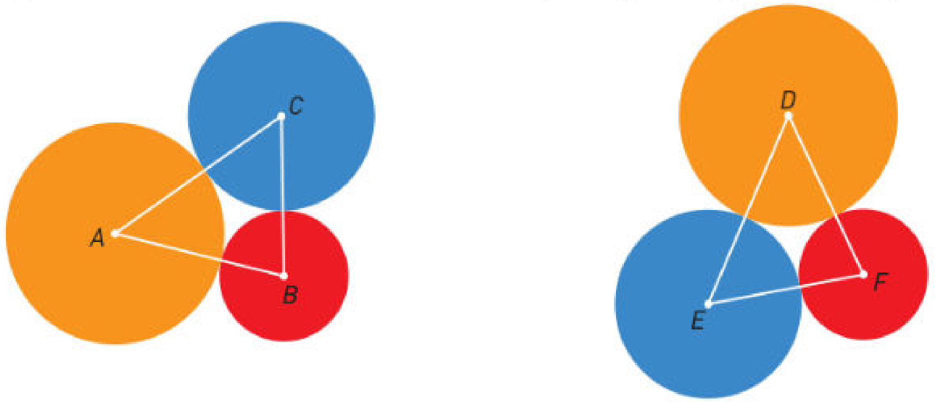
a) ¿Son congruentes los triángulos *ABC* y *BED*?



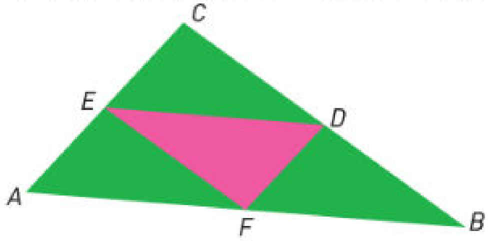

b) El pentágono es regular. ¿Los triángulos *ABC* y *ADE* son congruentes?




c) Los círculos del mismo color tienen radios iguales. ¿Son congruentes *ABC* y *DEF*?




d) ¿Son congruentes los triángulos *CED* y *FDE*?




$\overline{CB}$ es paralelo a $\overline{EF}$.
$\overline{ED}$ es paralelo a $\overline{AB}$.
$\overline{FD}$ es paralelo a $\overline{AC}$.

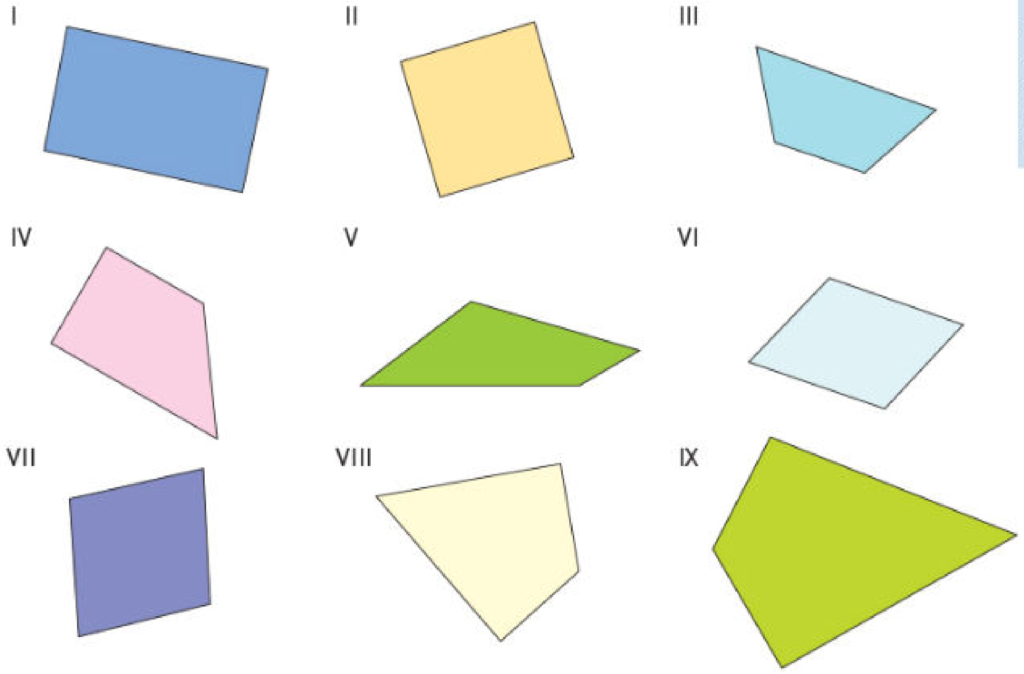
e) ¿Qué otros triángulos congruentes encuentras en la figura? Anota cuáles y explica por qué son congruentes.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten qué criterios de congruencia se pueden usar para contestar las preguntas anteriores.





**2** Traza una diagonal en cada cuadrilátero y responde en tu cuaderno las preguntas.




**Recuerda**
La *diagonal* de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

a) ¿En qué casos los cuadriláteros quedan divididos en dos triángulos congruentes con cualquiera de las dos diagonales? ¿Qué características deben tener los cuadriláteros para que suceda eso? Ten en cuenta la longitud de los lados, la amplitud de los ángulos, el paralelismo entre los lados, etcétera.
b) ¿En qué casos el cuadrilátero queda dividido en dos triángulos congruentes con sólo una diagonal? ¿Qué características deben tener los cuadriláteros para que ocurra eso?
c) ¿En qué casos los triángulos son congruentes e isósceles? ¿Qué características deben tener los cuadriláteros para que suceda eso?
d) ¿En qué casos los triángulos son congruentes y rectángulos? ¿Qué características deben tener los cuadriláteros para que ocurra eso?
e) ¿En qué casos los cuadriláteros quedarían divididos en cuatro triángulos congruentes con las dos diagonales? ¿Qué características deben tener los cuadriláteros para que resulte eso?
f) ¿En qué casos los cuadriláteros quedarían divididos en dos pares de triángulos congruentes con las dos diagonales? ¿Qué características deben tener esos cuadriláteros para que ocurra esto?

- Comenta las respuestas con el grupo y determinen cuáles son las correctas.

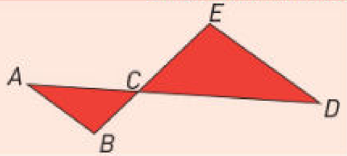
**3** Para responder la pregunta inicial, organizados por su profesor, tracen en el pizarrón un triángulo isósceles y uno equilátero y apliquen las condiciones mencionadas. Obtengan sus conclusiones en forma grupal.

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

## Semejanza de triángulos

PREGUNTA INICIAL

¿Qué datos te permitirían saber si estos triángulos son semejantes?

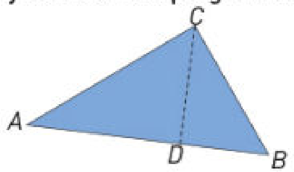



**1** Observa las figuras, analiza sus características y contesta las preguntas.

El triángulo *ABC* es rectángulo.

El ángulo recto es $\angle C$.

$\overline{CD}$ es la altura del triángulo.




a) ¿Por qué son semejantes $\Delta ABC$ y $\Delta ADC$? ______________________________

b) ¿Por qué son semejantes $\Delta ABC$ y $\Delta CBD$? ______________________________

c) ¿Por qué son semejantes $\Delta ADC$ y $\Delta CBD$? ______________________________

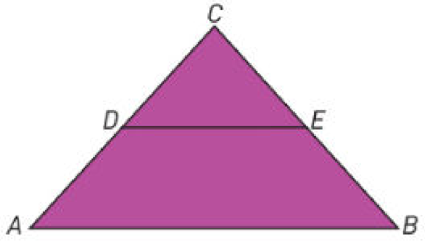
d) Si $|\overline{AB}| \cdot 10$ cm, $|\overline{BC}| \cdot 6$ cm, y $|\overline{CA}| \cdot 8$ cm, ¿cuál es la altura del triángulo?

______________________________

**2** Analiza la información del siguiente recuadro; además, observa y analiza las características de la figura y responde las preguntas.

Si se traza la altura sobre el lado mayor de un triángulo rectángulo, éste queda dividido en dos triángulos semejantes.

Los puntos *D* y *E* marcan el medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.




a) ¿Por qué son semejantes $\Delta ABC$ y $\Delta DEC$? ______________________________

b) ¿$\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{AB}$? ________ ¿Por qué? ______________________________

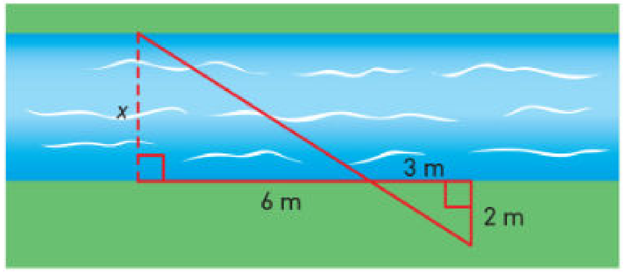
- Con ayuda de tu profesor, compara tus respuestas con las del resto del grupo y comenten las diferencias que encuentren.





**3** Resuelve los siguientes problemas y explica los procedimientos en tu cuaderno.

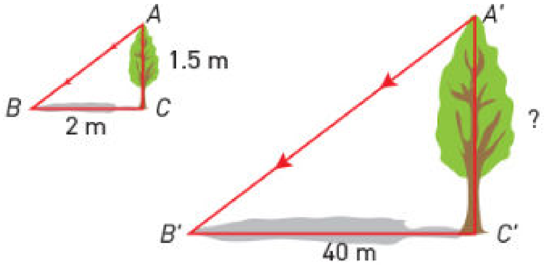
a) Observa la imagen y calcula el ancho del río.




El río mide ________ m de ancho.

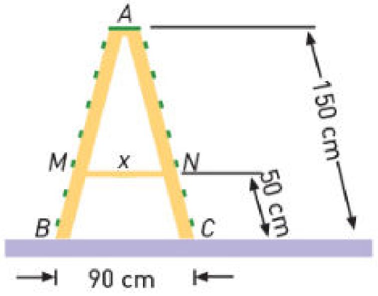
b) Los siguientes árboles se encuentran en el mismo parque y los datos se tomaron a la misma hora. ¿Cuál es la altura del árbol grande?

**Observa**
Los rayos del sol son paralelos.



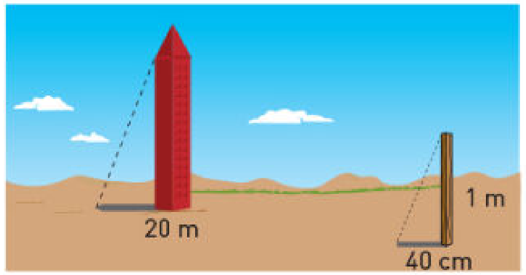

La altura del árbol grande es ________ m.

c) ¿Cuánto mide el travesaño de la escalera?




El travesaño mide ______ cm.

d) ¿Cuánto mide la altura de la torre?




La torre mide ______ m.

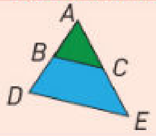
**4** Para responder la pregunta inicial, organizados por su profesor tracen en el pizarrón los dos triángulos. Recuerden en forma grupal los criterios de semejanza para dos triángulos y aplíquenlos para justificar su respuesta.

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

## Teorema de Tales I

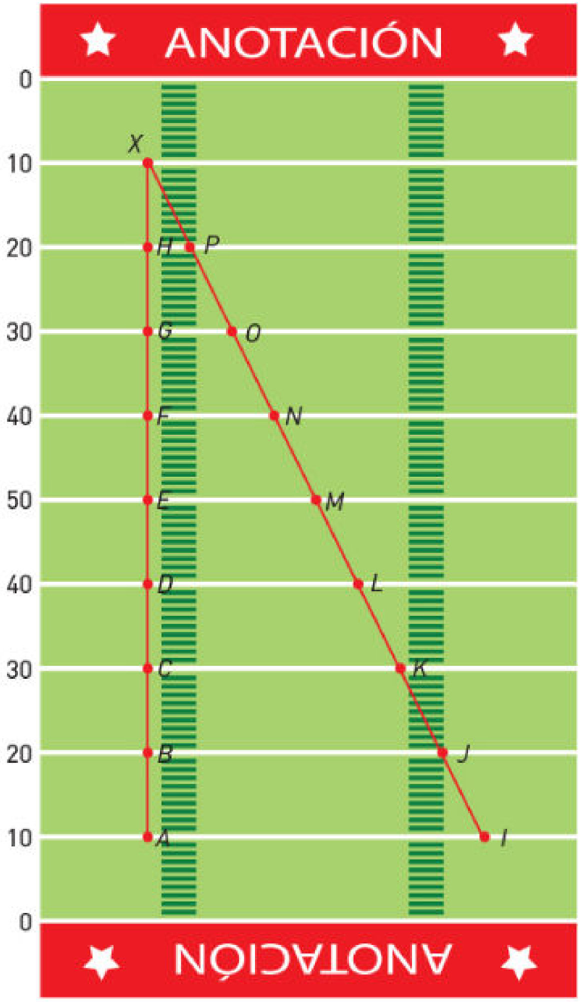
**PREGUNTA INICIAL**

En esta figura, $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos. Si $\overline{AB}$ mide lo mismo que $\overline{BD}$, ¿qué se puede decir de las longitudes de $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$?




**1** Observa la imagen que se presenta a continuación y contesta las preguntas.

Un campo de futbol americano mide 100 yardas (sin contar las zonas de anotación) y está dividido por líneas paralelas que señalan cada 10 yardas. Observa cómo se numeran.




El corredor 1 sale del punto $A$ y llega al punto $X$. El corredor 2 sale del punto $I$ y llega también al punto $X$.

a) ¿Qué corredor recorrió mayor distancia? ______

¿Por qué? ______

b) ¿Qué distancia, en yardas, recorrió el corredor 1? ______

c) ¿Qué distancia, en yardas, cubrió el corredor 1 del punto $A$ al $B$? ______

d) ¿Cómo son entre sí las longitudes $|\overline{AB}|$, $|\overline{BC}|$, $|\overline{CD}|$, $|\overline{DE}|$, $|\overline{EF}|$, $|\overline{FG}|$, $|\overline{GH}|$ y $|\overline{HX}|$? ______

e) Comprueba con tu compás que las longitudes $|\overline{XP}|$ y $|\overline{PO}|$ son iguales.

f) Comprueba en el siguiente espacio, usando triángulos semejantes, que $\overline{XP}$ y $\overline{PO}$ miden lo mismo.

g) ¿Cómo son entre sí las longitudes $|\overline{IJ}|$, $|\overline{JK}|$, $|\overline{KL}|$, $|\overline{LM}|$, $|\overline{MN}|$, $|\overline{NO}|$, $|\overline{OP}|$ y $|\overline{PX}|$? Explica por qué. ______

h) ¿En qué punto el corredor 1 iba a la mitad de la distancia entre $A$ y $X$? Márcalo con una ✓ en el dibujo de la página anterior. Justifica tu respuesta. ______

i) ¿En qué punto el corredor 2 iba a la mitad de la distancia entre $I$ y $X$? Márcalo con una ✓ en el dibujo de la página anterior. Justifica tu respuesta. ______

j) Compara las longitudes $|\overline{AI}|$ y $|\overline{EM}|$. ¿Cómo son entre sí? ______

**2** **Reúnete en equipo con dos o tres compañeros. Respondan y justifiquen sus procedimientos.**

La distancia $|\overline{AI}|$ mide 40 yardas.

a) ¿Cuánto mide $\overline{EM}$? ______ ¿Por qué? ______

b) ¿Cuánto mide $\overline{GO}$? ______ ¿Por qué? ______

c) ¿Cuánto mide $\overline{HP}$? ______ ¿Por qué? ______

d) ¿Cuánto mide $\overline{BJ}$? ______ ¿Por qué? ______

e) Si $|\overline{IJ}|$ · 11.18 yardas, ¿qué distancia recorrió el corredor 2? ______

¿Por qué? ______

f) Si ambos corredores salieron al mismo tiempo, conservaron la misma velocidad en todo el trayecto y llegaron al mismo tiempo al punto $X$, ¿qué distancia había recorrido el corredor 2 cuando el corredor 1 había cubierto 68 yardas? Expliquen su respuesta.

______

**3** **Para responder la pregunta inicial, trabajen en equipos de cuatro integrantes. Expliquen en su cuaderno las relaciones que existen entre las longitudes de los segmentos. Por ejemplo, entre $|\overline{DE}|$ y $|\overline{BC}|$.**

**Observa**

En tu biblioteca escolar encontrarás el siguiente libro: De la Peña, José Antonio, *Geometría y el mundo*, México, SEP-Santillana, 2002.

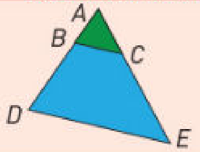
En él se abordan temas como el teorema de Tales, entre otros.

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

## Teorema de Tales II

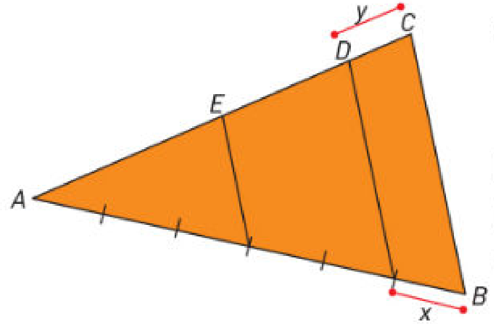
**PREGUNTA INICIAL**

En esta figura, $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos. Si $\overline{AB}$ mide el doble que $\overline{BD}$, ¿qué se puede decir de las longitudes de $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$?




**1** **Analiza la figura y sus características. Después contesta las preguntas.**

Las rectas transversales en el triángulo $ABC$ son paralelas al lado $\overline{CB}$ y el lado $\overline{AB}$ está dividido en segmentos iguales de longitud $x$.




a) ¿Qué triángulos semejantes identificas?

______________________

______________________

b) Calcula las siguientes longitudes.

$|\overline{DE}|$ · ______________________

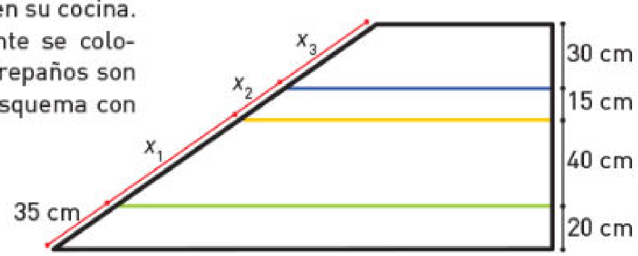
$|\overline{EA}|$ · ______________________

**Observa**

*Oblicuo* significa que "no es paralelo".

**2** **Forma equipo con dos o tres compañeros para analizar la situación y contesta.**

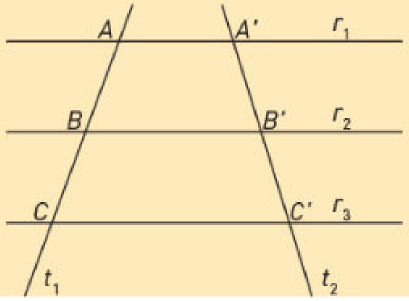
Daniel construyó una alacena en su cocina. Las tablas laterales del estante se colocan en forma oblicua y los entrepaños son tablas paralelas. Éste es un esquema con algunas medidas del mueble:




a) Anoten las longitudes de $x_1$, $x_2$ y $x_3$.

$x_1$· __________ cm $x_2$· __________ cm $x_3$· __________ cm

- Comenten con los otros equipos los procedimientos de solución que utilizaron y expliquen cuáles son las relaciones entre las medidas conocidas y las desconocidas.




Si tres o más paralelas son cortadas por dos trasversales a segmentos congruentes sobre una de éstas, corresponden segmentos congruentes sobre la otra.

$r_1$, $r_2$ y $r_3$ son rectas paralelas.

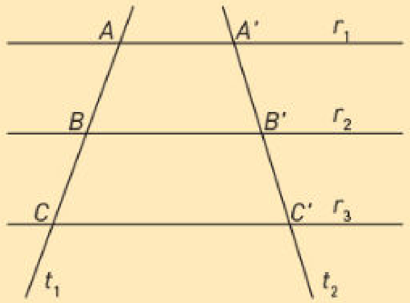
$t_1$ y $t_2$ son rectas trasversales.

Por tanto, Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$





### Teorema de Tales




Si tres o más paralelas son cortadas por dos trasversales, las medidas de dos segmentos cualesquiera sobre una de ellas son proporcionales a las de los segmentos correspondientes sobre la otra.

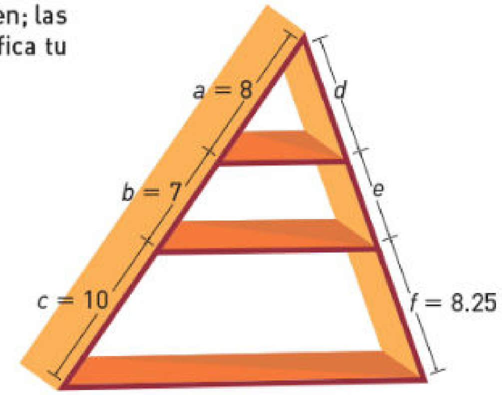
$r_1$, $r_2$ y $r_3$ son rectas paralelas.

$t_1$ y $t_2$ son rectas trasversales.

Entonces:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{B'C'}|}$$

**3** **Encuentra las longitudes que se piden; las medidas están en decímetros. Justifica tu procedimiento en el cuaderno.**




$d$ · _ dm

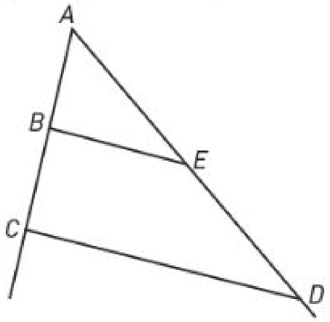
$e$ · _ dm

**4** **Analiza y resuelve el siguiente problema. Justifica tu procedimiento en el cuaderno.**

Si el largo del mueble de la actividad 3 es 29 dm, ¿cuál es la longitud de los entrepaños?

Entrepaño chico: __________ dm Entrepaño grande: __________ dm

- Compara tus respuestas con las del resto del grupo. Expliquen los procedimientos que siguieron. Después discutan y completen la igualdad de cocientes.




$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\quad|}$$

**5** **Para responder la pregunta inicial, en forma grupal y organizados por su profesor, sugieran respuestas justificadas en la información contenida en los recuadros de esta lección.**

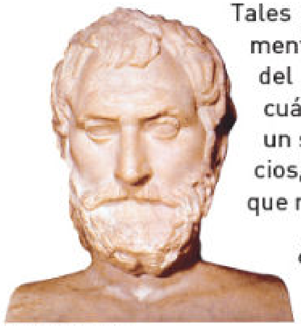
Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

## Teorema de Tales III

**PREGUNTA INICIAL**

¿Cómo calcularías la altura de un árbol si conocieras la longitud de su sombra?

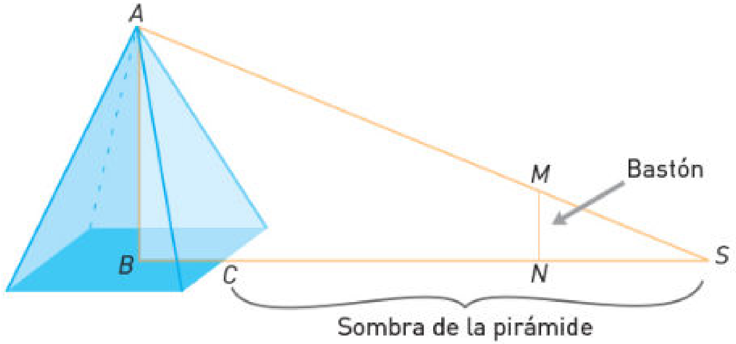
**1** Lee la siguiente historia y responde las preguntas.



Tales de Mileto

Tales nació en la ciudad de Mileto, una antigua ciudad de Asia Menor (actualmente Turquía). Llegó a ser un gran matemático. Se cuenta que, en las tierras del Nilo, los sacerdotes egipcios, para ponerlo a prueba, le preguntaron en cuánto estimaba la altura de la gran pirámide de Kéops. Con la serenidad de un sabio, Tales respondió que antes de estimarla prefería medirla. Los egipcios, estupefactos, presenciaron la simple y maravillosa medición de Tales, que mediante un bastón y una proporción logró la proeza.

¿Cómo procedió Tales para medir la pirámide? Colocó un bastón en posición vertical, de manera que su sombra terminase en el mismo punto que la sombra de la pirámide. Utilizando una proporción, calculó la altura deseada.




a) ¿Cómo se puede saber la medida de $\overline{BC}$? ______________________

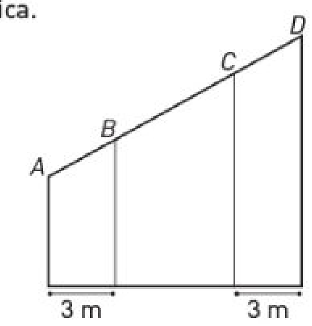
______________________

b) ¿Qué segmentos de los que intervienen en la proporción podían ser medidos en forma directa? ______________________

c) ¿Qué proporción planteó Tales? ______________________

**2** Analiza el siguiente problema y calcula lo que se indica.

Sobre un patio de 12 m de largo se colocó una lona de 18 m, sujetada por cuatro postes, como se muestra en el esquema. Calcula las longitudes que se piden.




$|\overline{AB}|$ = __________ m

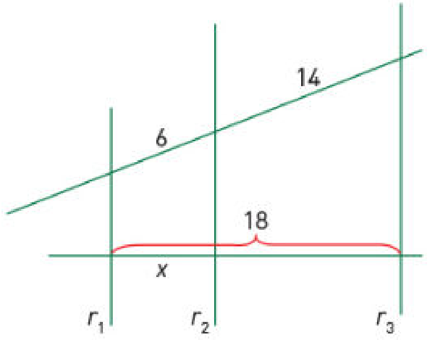
$|\overline{BC}|$ = __________ m

$|\overline{CD}|$ = __________ m



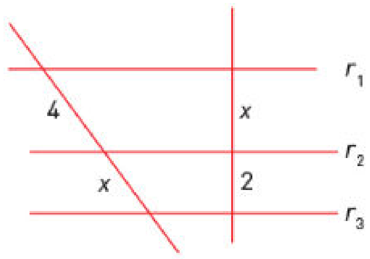
**3** Determina en cada caso el valor de $x$. Las rectas $r_1$, $r_2$ y $r_3$ son paralelas.

a)




$x$ = __________

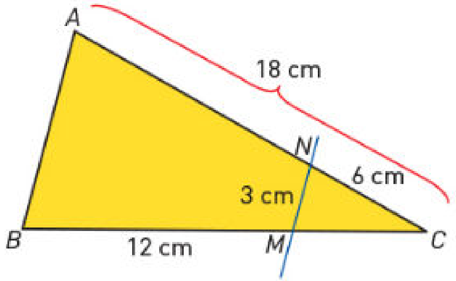
b)




$x$ = __________

**4** Calcula en cada caso el perímetro del triángulo $ABC$.

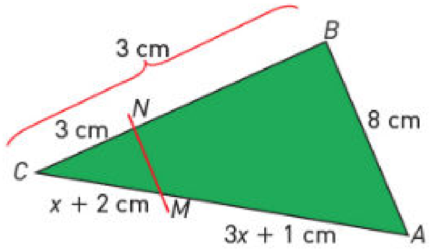
a)




Perímetro = ______ cm

Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ son paralelos.

b)




Perímetro = ______ cm

Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ son paralelos.

- Compara tus respuestas de las actividades 2, 3 y 4 con las de tus compañeros. Corrijan sus errores, si es necesario. Después reúnanse en equipos y planteen un problema que se resuelva utilizando el teorema de Tales.

**5** Para responder la pregunta inicial, en equipos de cuatro integrantes elaboren un esquema con las condiciones del problema, y calculen y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

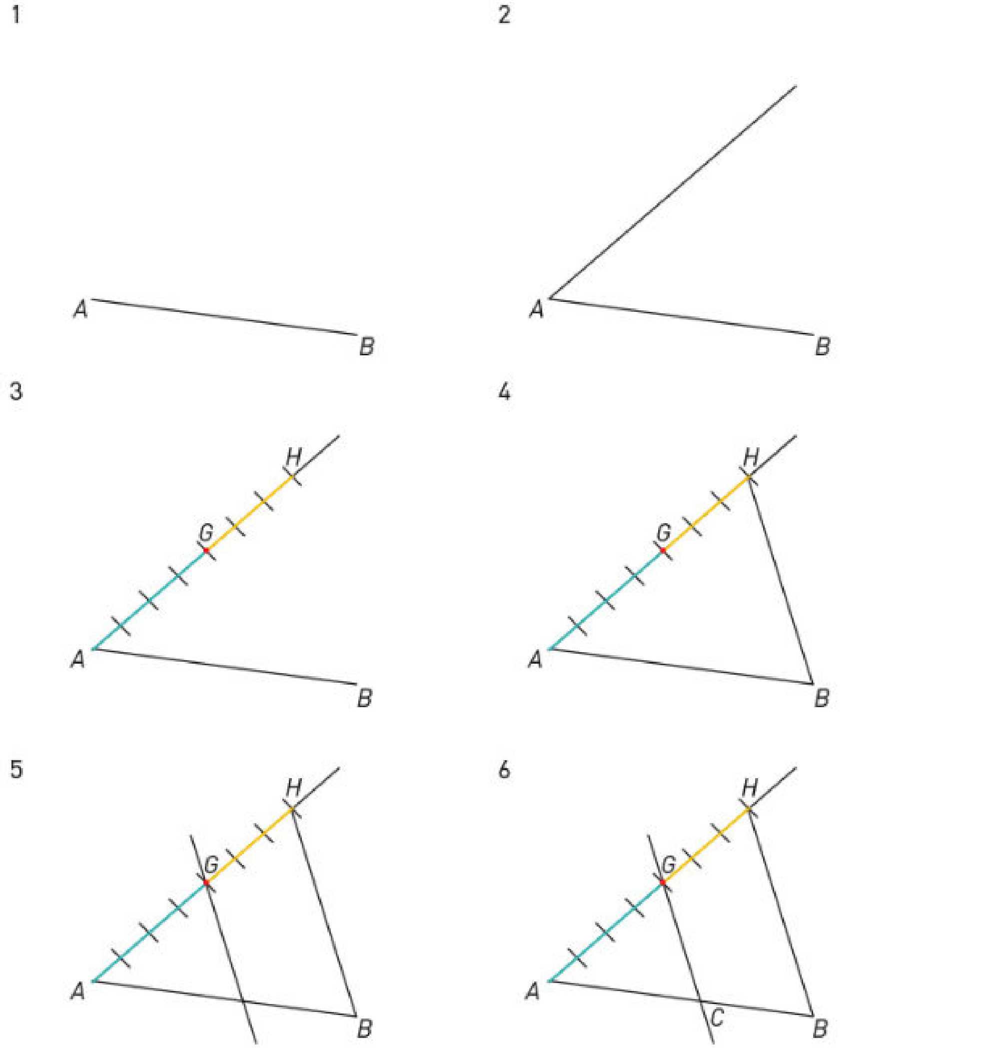
Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

## Teorema de Tales IV

**PREGUNTA INICIAL**

¿Cómo dividirías, empleando tu juego de geometría, pero sin medir, un segmento en dos partes de manera que una de ellas mida el doble que la otra?

**1** Observa los trazos, en cada uno de los pasos, para dividir el segmento $\overline{AB}$ en la razón $\frac{4}{3}$. Contesta las preguntas y justifícalas en tu cuaderno.




a) ¿La inclinación de la recta del paso 2 puede ser cualquiera? ¿Por qué?
b) ¿Por qué se hicieron siete marcas en el paso 3?
c) ¿Cómo son entre sí las rectas trazadas en los pasos 4 y 5?
d) ¿Los triángulos $ACG$ y $ABH$ son semejantes? ¿Por qué?
e) Explica en tu cuaderno cada paso y por qué el punto $C$ divide al segmento en la razón $\frac{4}{3}$.





**2** Divide los segmentos según la razón que se indica. Utiliza escuadras, regla y compás.

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$

**3** Divide el siguiente segmento en tres partes de manera que la razón de la primera a la segunda sea $\frac{3}{4}$, y la razón de la segunda a la tercera sea $\frac{2}{3}$.

**4** Traza en tu cuaderno los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ de 5 cm, 2 cm y 3 cm, respectivamente. Después traza un segmento de longitud $x$ que haga válido el cociente que se indica:

$$\frac{5}{2} = \frac{3}{x}$$

**5** Para responder la pregunta inicial, trabajen en equipos de tres integrantes. Lean la siguiente información, hagan los trazos necesarios y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Un punto $C$ divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\frac{m}{n}$ si $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{m}{n}$.

**TIC**

Ingresa al sitio <www.geogebratube.org/student/m31282>. En él encontrarás una aplicación para trabajar con varios casos del teorema de Tales. Copia en tu cuaderno un caso particular y compáralo con el de un compañero.

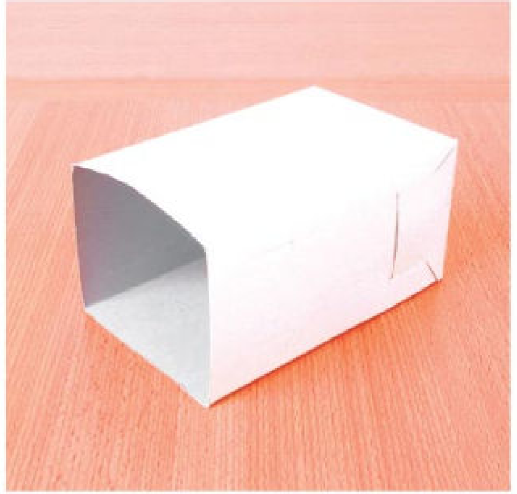
Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

## La caja negra

**Reúnete en equipo para construir una caja negra. Necesitan el siguiente material.**

- Una caja con forma de prisma cuadrangular o rectangular.
- Papel albanene o papel encerado (o cualquier otro translúcido).
- Un pliego de cartulina negra.
- Cinta adhesiva, tijeras y pegamento.

a) Cierren la caja y quiten una de las caras de menor área.



b) Cubran la cara que quitaron con el papel translúcido para formar una pantalla.

c) Cubran la cara que tiene la pantalla con la cartulina negra.

d) Hagan un agujero en la cara opuesta a la que tiene la pantalla.

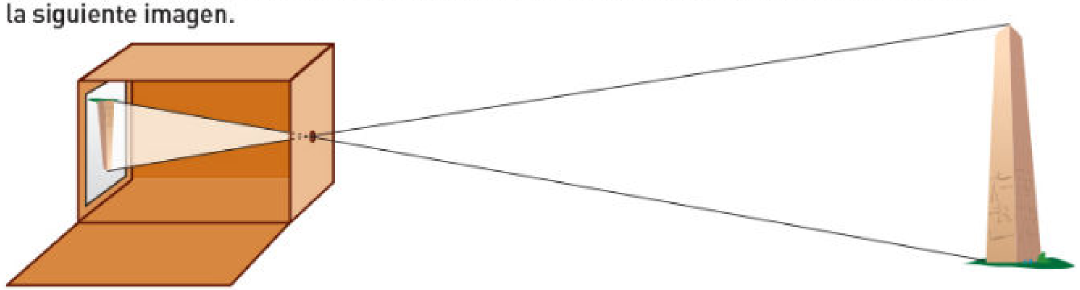


e) Su caja ya está lista. Después, apúntenla a un lugar con luz y miren la pantalla. Tapen con su cabeza y manos los huecos de luz.

Verán una imagen, ¡pero de cabeza! Analicen lo siguiente y respondan en el cuaderno.
¿Por qué creen que las imágenes se ven así?
¿De qué depende el tamaño de la imagen?

**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

**Para entender lo que sucede, recuerden que la luz viaja en línea recta. Analicen la siguiente imagen.**

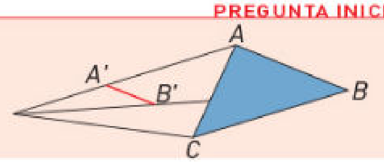


a) Vean varios objetos con su caja negra. Acérquense y aléjense de ellos. Expliquen con un esquema cómo cambia el tamaño de la imagen.

## Homotecias I

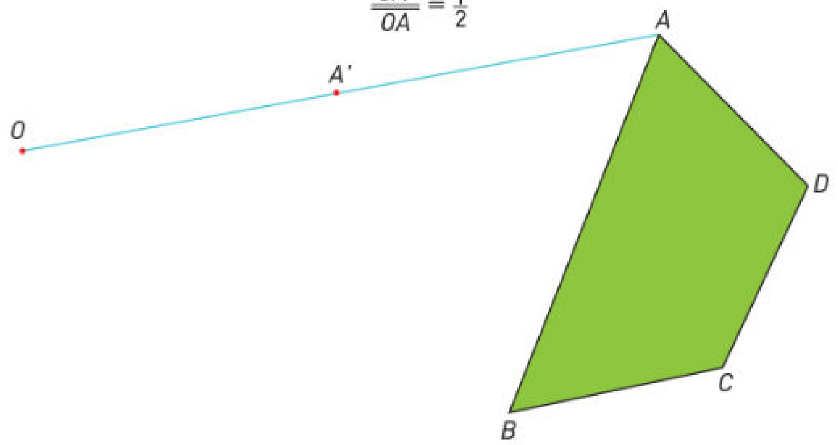
**PREGUNTA INICIAL**

¿Dónde colocarías el punto $C'$ para formar el triángulo $\triangle A'B'C'$ semejante a $\triangle ABC$?




**1** Traza un polígono $A'B'C'D'$ semejante a $ABCD$. Sigue el procedimiento aprendido en la lección 28 de la página 89. Observa la razón entre los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$. Después contesta las preguntas.

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$$




a) ¿Por qué son semejantes los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OA'B'$? ____________________

____________________

b) ¿Cuál es la razón de semejanza del $\triangle OA'B'$ respecto a $\triangle OAB$? ____________________

c) ¿Cuál es el valor de $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$? ____________________

d) ¿Son paralelos $|\overline{A'B'}|$ y $|\overline{AB}|$? __________ ¿Por qué? ____________________

____________________

e) ¿Por qué son semejantes los triángulos $\triangle OBC$ y $\triangle OB'C'$? ____________________

____________________

f) ¿Cuál es la razón de semejanza de $\triangle OB'C'$ respecto al $\triangle OBC$? ____________________

g) ¿Cuál es el valor de $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$? ____________________

h) ¿Son paralelos $|\overline{B'C'}|$ y $|\overline{BC}|$? __________ ¿Por qué? ____________________

____________________

i) ¿Cuál es el valor de $\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}$? __________ ¿Por qué? ____________________

____________________

j) Explica por qué los cuadriláteros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son semejantes.

____________________

**Recuerda**

Dos polígonos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.



**2** Traza las siguientes homotecias en la razón que se pide. El centro de homotecia es $O$.

a) Razón: $\frac{2}{3}$

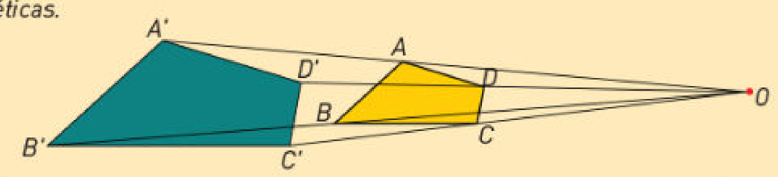

b) Razón: 2


- Comenta con el grupo la forma como hicieron sus trazos y redacten juntos un procedimiento para trazar una figura homotética de otra en una razón dada.

**3** Para responder la pregunta inicial, trabajen en parejas para que desarrollen el procedimiento que cumpla con las condiciones del problema. Además, lean el siguiente texto para justificar sus respuestas.

Una *homotecia* es una transformación de una figura geométrica en la que, a partir de un punto fijo, se obtiene una figura semejante. El punto fijo se llama *centro de homotecia*.

Por ejemplo, en la figura, el punto $O$ es el centro de homotecia; la figura $ABCD$ es la original y la figura $A'B'C'D'$ es la transformación. Se dice que las dos figuras son *homotéticas*.




La razón entre los segmentos que unen el centro de homotecia y los vértices correspondientes de las figuras se llama *razón de homotecia*. La *razón de homotecia* es igual que la razón de semejanza entre las figuras.

**TIC**

Ingresa al sitio <arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/>. Trabaja con el simulador de construcción de figuras homotéticas que ahí encontrarás. Comenta tu experiencia con un compañero y digan cuáles son los efectos de variar el centro de homotecia.

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

## Homotecias II

PREGUNTA INICIAL

¿En qué casos se obtiene una reducción o una ampliación al efectuar una homotecia?

**1** La siguiente figura representa la superficie que ocupa un edificio y el punto representa un poste que se toma como referencia para construir otro edificio con la misma forma, pero más pequeño. Aplica a la figura una homotecia con centro en *O* de manera que se obtenga una reducción.


**2** Ahora se tiene la vista aérea de un terreno y se quiere construir otro más grande pero con la misma forma, tomando como referencia el punto *O*. Aplica una homotecia con centro en *O* de manera que se obtenga una ampliación.


**3** Contesta en tu cuaderno las preguntas. Después comparen sus respuestas en grupo y justifíquenlas.

a) Si la razón de homotecia es menor que 1, ¿la figura resultante es mayor o menor que la original? ¿En qué orden aparecen las figuras y el centro de homotecia?
b) ¿Y cuándo la razón de homotecia es mayor que 1?
c) ¿Qué sucede cuando la razón es 1?

**4** Encuentra el centro de homotecia de cada par de figuras. Calcula también las dos razones de homotecia: primero considera la figura chica como la original, y después supón que la grande es la original.

a)

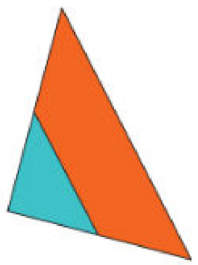
Razones de homotecia:

_________ y _________





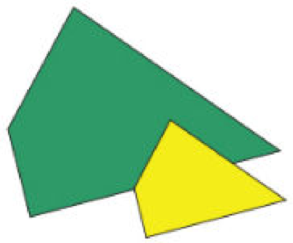
b)



Razones de homotecia:

_________ y _________

c)

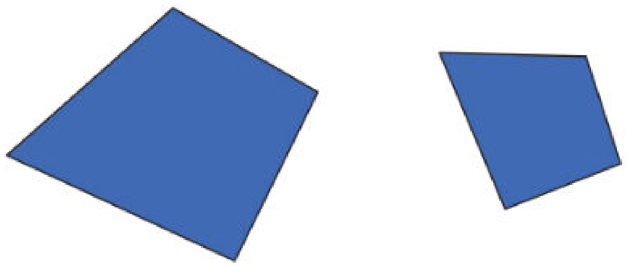


Razones de homotecia:

_________ y _________

- Compara tus resultados con los del resto del grupo. Comenten cómo se relacionan las razones que encontraron y escriban una conclusión en su cuaderno.

**5** Observa estas figuras y escribe tus respuestas en las líneas.



a) ¿Las figuras son semejantes? _________ ¿Por qué? _________________

_________________________________________

_________________________________________

b) ¿Las figuras son homotéticas? _________ ¿Por qué? _________________

_________________________________________

_________________________________________

**6** Respondan la pregunta inicial en forma grupal y organizados por su profesor. Después elaboren sus conclusiones y escríbanlas en el cuaderno.

**Observa**

Dentro de la colección Libros del Rincón se encuentra el siguiente: Hernández Garciadiego, Carlos, *La geometría en el deporte*, México, SEP-Santillana, 2002.

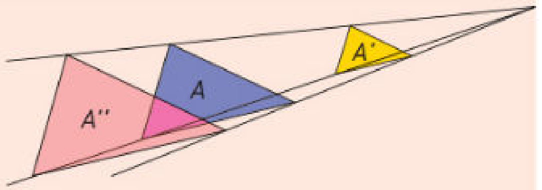
Léelo y comprobarás que la homotecia tiene aplicaciones en donde menos te lo esperas.

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

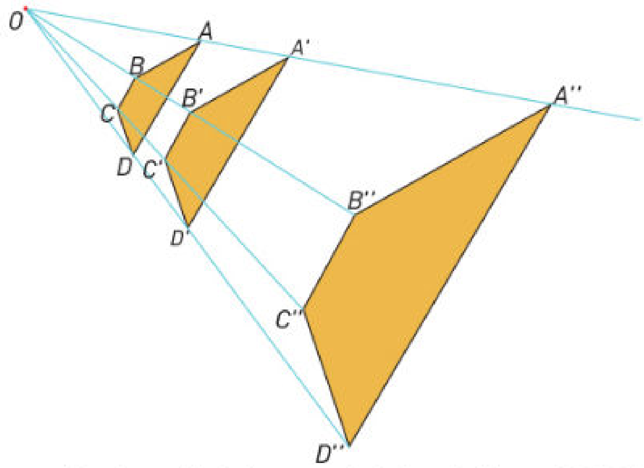
## Homotecias III

PREGUNTA INICIAL

$A'$ es una homotecia de $A$ con razón $\frac{1}{2}$.
$A''$ es una homotecia de $A'$ con razón $\frac{5}{2}$.
¿Por qué $A''$ es una homotecia de $A'$? ¿Cuál es la razón de homotecia de $A''$ respecto de $A$?




**1** Observa las figuras y contesta.




a) Si $|\overline{OA}| = 4$ cm y $|\overline{OA'}| = 6$ cm, ¿cuál es la razón de homotecia del cuadrilátero $A'B'C'D'$ respecto al cuadrilátero $ABCD$? ____________

b) Si $|\overline{A'A''}| = 6$ cm, ¿cuál es la razón de homotecia del cuadrilátero $A''B''C''D''$ respecto al cuadrilátero $A'B'C'D'$? ____________

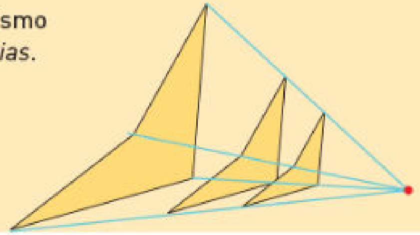
c) ¿Cuál es la razón de semejanza del cuadrilátero $A''B''C''D''$ respecto al cuadrilátero $ABCD$? ________ ¿Cómo lo sabes? ____________

____________

d) Si $|\overline{AD}| = 3$ cm, ¿cuál es la medida de $\overline{A''D''}$? ____________

e) Lee la siguiente información y con ayuda de su profesor comenten en grupo en qué casos de la vida cotidiana se encuentran este tipo de composiciones.

Cuando dos o más homotecias tienen el mismo centro, se trata de una *composición de homotecias*.

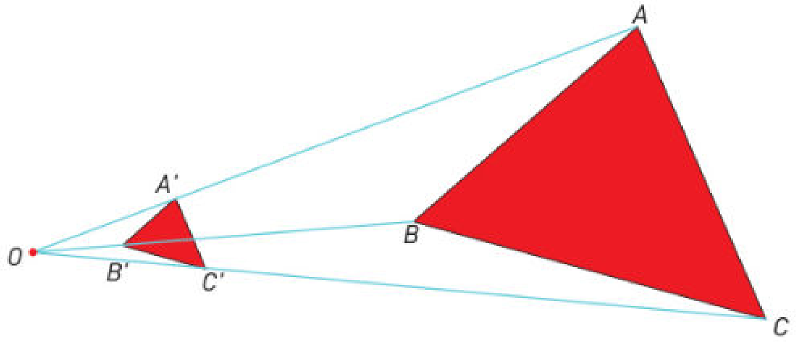






**2** Observa las figuras, efectúa lo que se pide y contesta.

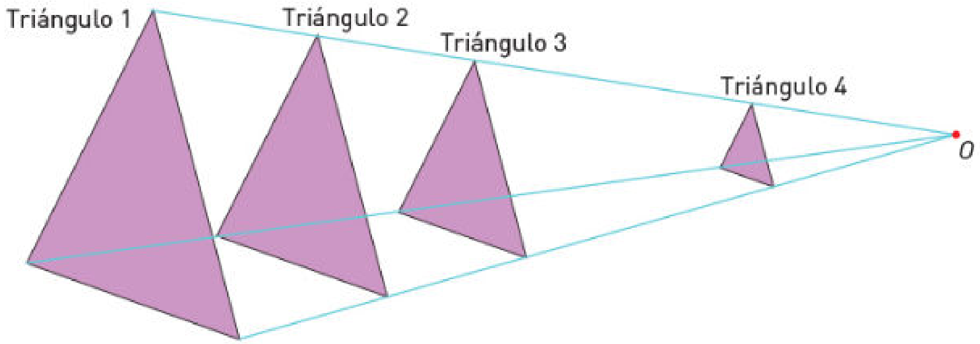
La razón de homotecia del $\Delta A'B'C'$ respecto al $\Delta ABC$ es $\frac{1}{4}$.




a) Con centro de homotecia en $O$, traza en tu cuaderno un triángulo cuya razón de homotecia respecto a $\Delta A'B'C'$ sea 2. Nombra sus vértices $A''$, $B''$ y $C''$.

b) ¿Cuál es la razón de homotecia de $\Delta A''B''C''$ respecto a $\Delta ABC$? ____________

**3** Observa las figuras y completa la tabla con las razones de homotecia de los triángulos de cada fila respecto a los triángulos de cada columna.




| | Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 |
|---|---|---|---|---|
| Triángulo 1 | 1 | $\frac{5}{4}$ | | |
| Triángulo 2 | | 1 | $\frac{4}{3}$ | |
| Triángulo 3 | | | 1 | $\frac{12}{5}$ |
| Triángulo 4 | | | | 1 |

La razón de una composición de homotecias es el producto de las razones.

**4** Para responder las preguntas iniciales, recurran a los conceptos de homotecia y razón. Justifiquen sus conclusiones en grupo y con ayuda de su profesor.

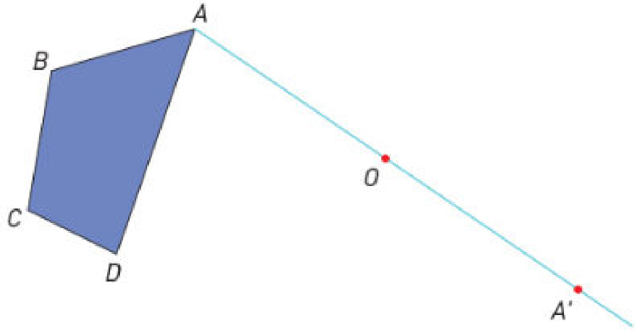
Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

## Homotecias IV

PREGUNTA INICIAL

Si unes los vértices correspondientes de las figuras, ¿resultan ser homotéticas? ¿Por qué?

**1** Observa la figura siguiente y haz los trazos que se te indican.



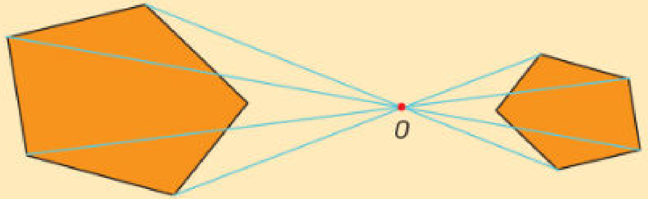

a) En la imagen, $\overline{OA} \cong \overline{OA'}$, traza una recta que pase por O y *B* y prolóngala hacia la derecha. Localiza en el lado derecho de O el punto *B'*, de manera que se cumpla que $\overline{OB} \cong \overline{OB'}$. Replica el procedimiento con los puntos *C* y *D*.

b) Traza el cuadrilátero *A'B'C'D'*.

c) Reúnete con tres compañeros para discutir cuáles son las semejanzas y diferencias entre los cuadriláteros *ABCD* y *A'B'C'D'*. Revisen cómo son sus ángulos correspondientes, si hay proporcionalidad en los lados correspondientes y si los lados son paralelos. Analicen la siguiente información y anoten enseguida las conclusiones a las que llegaron.

El cuadrilátero *ABCD* y el cuadrilátero *A'B'C'D'* que trazaste son también figuras homotéticas, sólo que como $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$ van en sentidos opuestos, la razón de homotecia es negativa. En este caso, la razón de homotecia es –1. Se dice, entonces, que la homotecia es negativa.

En una *homotecia negativa* se obtiene una figura semejante, pero rotada 180°.

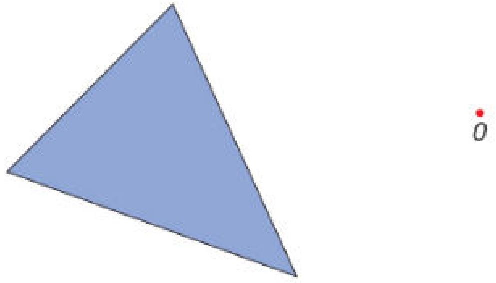




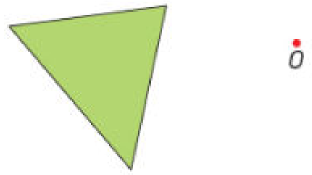



**2** Traza homotecias con centro en *O* y con las razones que se indican.

a) Razón: $\frac{2}{3}$



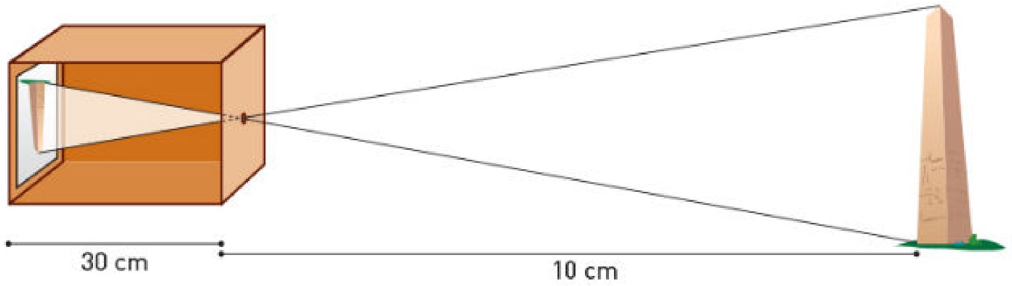

b) Razón: –3




**TIC**

Ingresa al sitio <www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b03_t04_s02_aulademedios/index.html>. Resuelve los ejercicios de homotecia que ahí encontrarás y valida tus resultados con tres de tus compañeros.

**3** Recuerda la actividad de la sección Juegos y retos de la página 140. Analiza la imagen y responde las preguntas.




a) ¿Cuál es la razón de homotecia de la imagen respecto al objeto real? ____________

b) Si la imagen mide 20 cm de altura, ¿cuál es la altura del objeto real? ____________

- Comenta con el grupo cómo se calcula la altura de un objeto a partir de su imagen.

**4** Para responder la pregunta inicial, discutan en grupo cuáles son las características de dos figuras con homotecia de razón negativa. Escriban las conclusiones en su cuaderno.

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

## Los dados

En los vestigios de muchas culturas antiguas (africanas, americanas, asiáticas, europeas, australianas) se han encontrado restos de lo que podrían ser dados. Es muy probable que primero se emplearan para adivinar el futuro y no para jugar.

Sófocles, el poeta trágico griego, aseguraba que los dados se inventaron hace 1 300 años a. n. e. durante el largo sitio de Troya. Sin embargo, se han encontrado dados en tumbas egipcias de 2000 años a. n. e. o mención de ellos en documentos de India aún más antiguos.

Hay dados de muchos materiales y muchas formas, no sólo como el dado cúbico más común. A continuación se presentan algunos ejemplos.

¿Reconoces las formas anteriores? ¿Cuántas caras tiene cada dado?



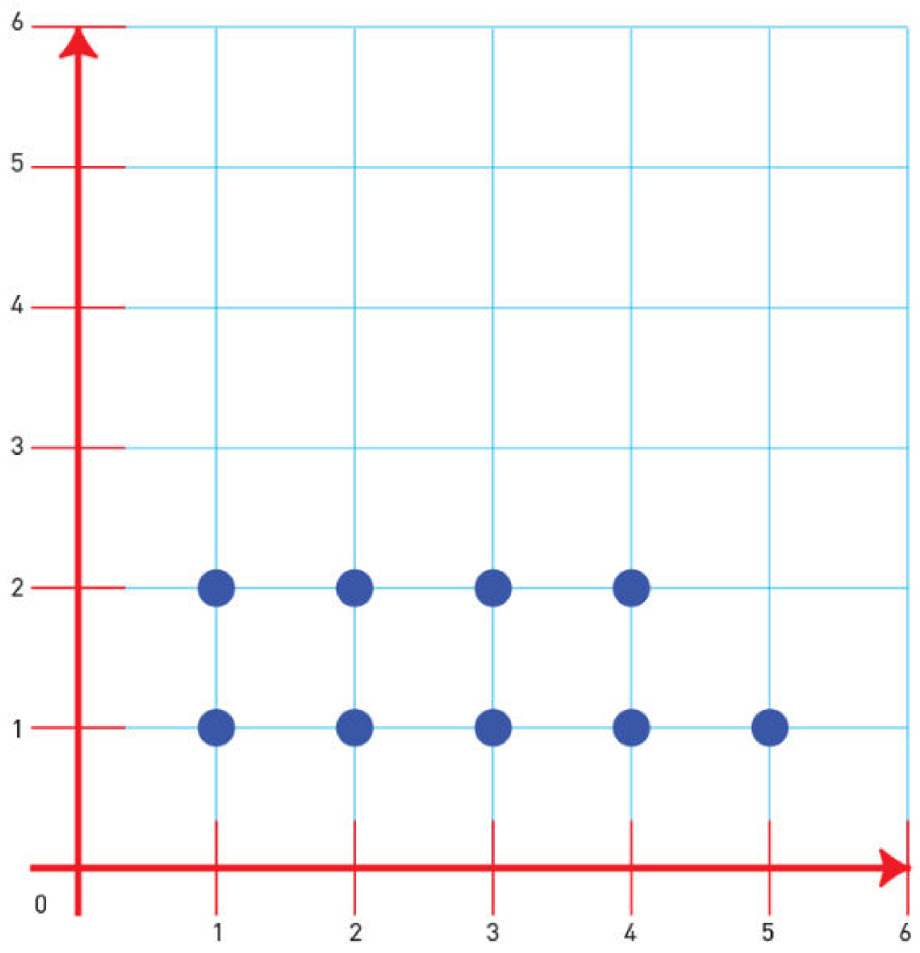
## Retos

Recuerda los experimentos de la lección 17 para que contestes las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo se determina la probabilidad de que al lanzar dos dados de seis caras se obtengan dos 6?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado de cuatro caras se obtenga un 1 o un 2?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado de doce caras y otro de 20 se obtenga un 4 y un 3?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado de seis caras y otro de cuatro se obtenga un 1 y un 2?

PISTAS Y ESTRATEGIAS

Para examinar las posibilidades al lanzar dos dados, puedes usar el plano cartesiano. En el siguiente se registran algunas posibilidades al lanzar dos dados de seis caras.



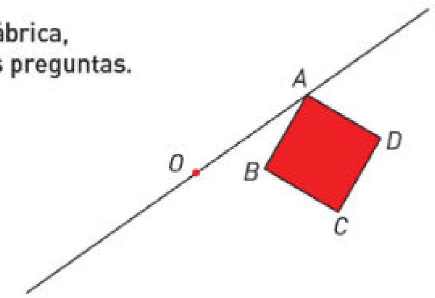
## Gráficas de funciones I

PREGUNTA INICIAL

¿Cómo es la gráfica de $y = x^2$?

El cuadrado rojo representa la superficie de una fábrica. Los dueños de ésta pretenden cambiarla de posición y tamaño por cuestiones financieras.

**1** **Para hacer lo que quieren en la fábrica, traza lo que se pide y contesta las preguntas.**




a) Localiza el punto $A'$ de manera que $|\overline{OA'}| = (1.5)|\overline{OA}|$. Traza líneas paralelas para construir el cuadrado $A'B'C'D'$, homotético al cuadrilátero $ABCD$ con centro en $O$.

b) Traza el cuadrado $A''B''C''D''$ que sea homotético a $ABCD$ en la razón $-2$.

c) Si $|AB| = 1$ unidad, ¿cuál es el perímetro del cuadrado $ABCD$? ________

d) ¿Cuál es el área del cuadrado $A'B'C'D'$? ________

e) ¿Cuál es el perímetro del cuadrado $A''B''C''D''$? ________

f) ¿Cuál es el área del cuadrado $A''B''C''D''$? ________

g) Completa la siguiente tabla. La variable $x$ indica las razones de homotecia aplicadas al cuadrado de la figura anterior.

| $x$ | 0.1 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 4.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Perímetro | 0.4 | | | | | | | |
| Área | 0.01 | | | | | | | |

h) Completa la siguiente tabla con razones de homotecia negativa.

| $x$ | −0.1 | −0.5 | −1 | −1.5 | −2 | −2.5 | −3 | −5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Perímetro | 0.4 | | | | | | | |
| Área | 0.01 | | | | | | | |

**2** **Contesten las siguientes preguntas en forma grupal y organizados por su profesor.**

a) ¿Qué sucede con el perímetro y el área cuando la razón de homotecia es cercana a 0; por ejemplo, 0.1 o 0.01? ________

b) ¿Cómo es la figura homotética en los casos que se mencionan en el inciso anterior?



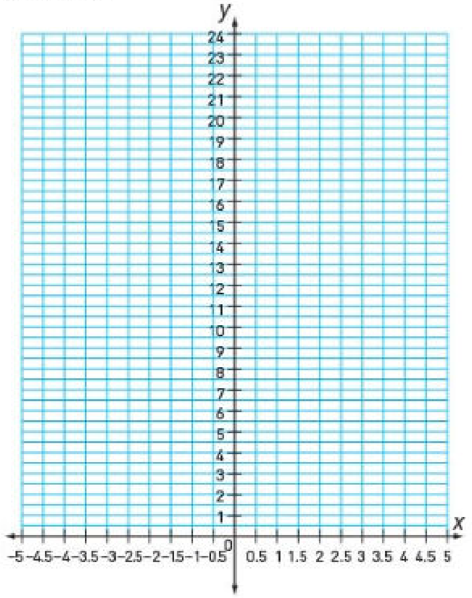


c) ¿Qué sucede en el caso extremo; es decir, cuando la razón de homotecia es 0?

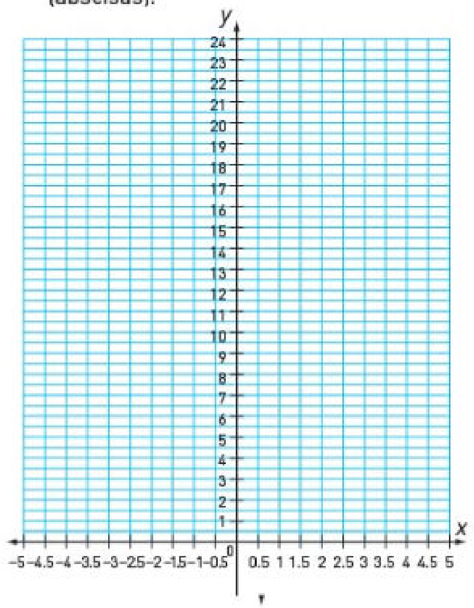
d) ¿Cuál es el área y el perímetro del cuadrado que guarda una homotecia de razón 0?

**3** **Traza las gráficas que se piden. Considera los valores de las tablas de los incisos g) y h) de la actividad 1. También considera $x$ · 0.**

Relación entre el perímetro del cuadrado (ordenadas) y la razón de homotecia (abscisas).




Relación entre el área del cuadrado (ordenadas) y la razón de homotecia (abscisas).




a) ¿El perímetro es proporcional a la razón de semejanza? ______ ¿Por qué? ________

b) ¿El área es proporcional a la razón de semejanza? ______ ¿Por qué? ________

c) ¿Por qué ambas gráficas son simétricas respecto al eje $y$? ________

d) Además de la simetría, ¿qué tienen en común ambas gráficas? ________

e) ¿Qué las diferencia? ________

**4** **Para responder la pregunta inicial, en equipo tabulen los valores de $y = x^2$ y hagan su gráfica. Compárenla con las gráficas trazadas en esta lección y discutan sus diferencias y similitudes.**

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

## Gráficas de funciones II

**PREGUNTA INICIAL**

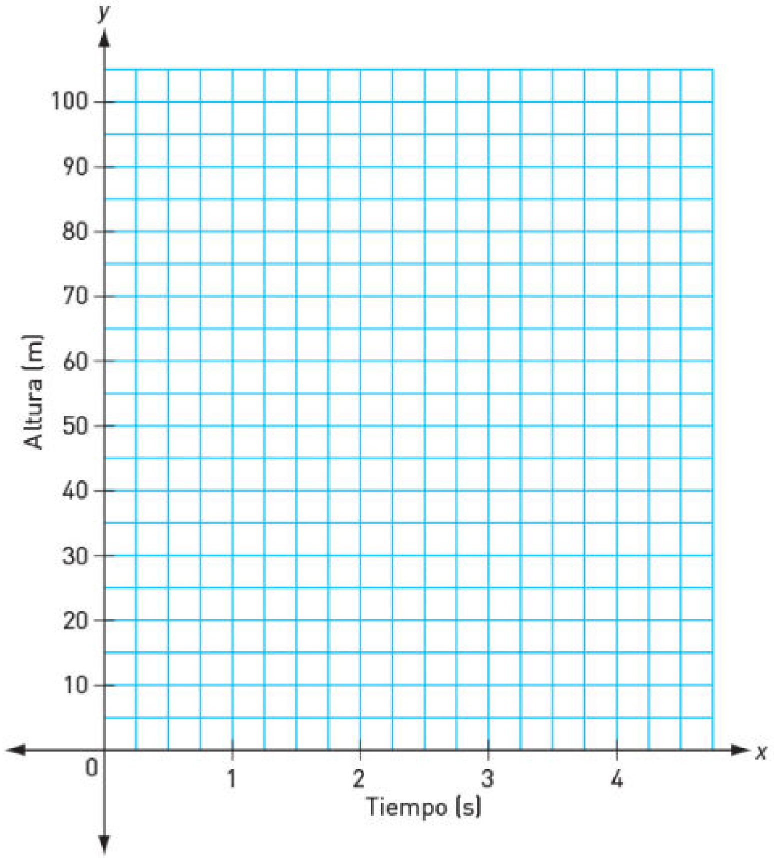
¿Cuál es la diferencia entre la gráfica de $y = x^2$ y de $y = x^2 + 1$?

**1** Lee la situación y efectúa lo que se pide.

Se tiene la función $h = 100 - 4.9t^2$, la cual relaciona el tiempo ($t$) y la altura a la que se encuentra un cuerpo en caída libre desde una altura de 100 m.

a) Completa la siguiente tabla y elabora la gráfica de la función.

| $t$ (s) | 0 | 1.6 | 1.9 | 2.2 | 2.6 | 2.7 | 3.2 | 3.6 | 4 | 4.3 | 4.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ (m) | | | | | | | | | | | |




b) Aproximadamente, ¿dónde cruza la gráfica al eje $x$? ______

¿Qué significa esto? ______

**TIC**

Ingresa al sitio <conteni2.educarex.es/mats/14357/contenido/>. Ahí encontrarás una aplicación para trabajar con casos de caída libre. Elige un caso y exponlo ante el grupo.





c) Si el objeto se hubiera dejado caer desde 50 m, ¿en qué punto empezaría la gráfica?

______

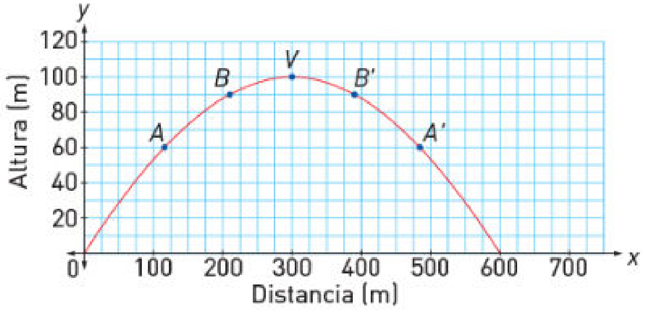
d) ¿Por qué sólo se consideran valores positivos de $t$? ______

e) ¿Qué distancia recorre el objeto en el primer segundo (de $t = 0$ a $t = 1$)? ______

f) ¿Y entre $t = 1$ y $t = 2$? ______

g) ¿Cómo sería la gráfica si el objeto se soltara desde mayor altura? ______

**2** Analiza la gráfica y contesta.




En la gráfica se representa la trayectoria que sigue una bengala. Las coordenadas del eje $x$ representan la distancia y las coordenadas del eje $y$, la altura.

a) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento la bengala se encuentra a mayor altura?

______

b) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento la bengala cayó al piso? ______

c) ¿En qué punto la bengala se encuentra a 60 m de altura? (Hay dos respuestas).

______

d) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento la bengala se encuentra a 80 m de altura? (Hay dos respuestas). ______

e) Aproximadamente, ¿a qué altura del piso se encontraba la bengala cuando había recorrido 100 m? ______ ¿En qué otro momento la bengala se encontraba a esa misma altura? ______

- Comenten en forma grupal en qué son similares las gráficas de las actividades anteriores y por qué lo son, a pesar de que las variables representan algo distinto.

**3** Trabaja con un compañero para que elaboren en su cuaderno la gráfica del problema de la actividad 1, inciso b), de la página 117.

**4** Para responder la pregunta inicial, organizados por su profesor seleccionen a dos compañeros para que elaboren las gráficas respectivas con ayuda del grupo. Comenten las diferencias y similitudes que encuentren.

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

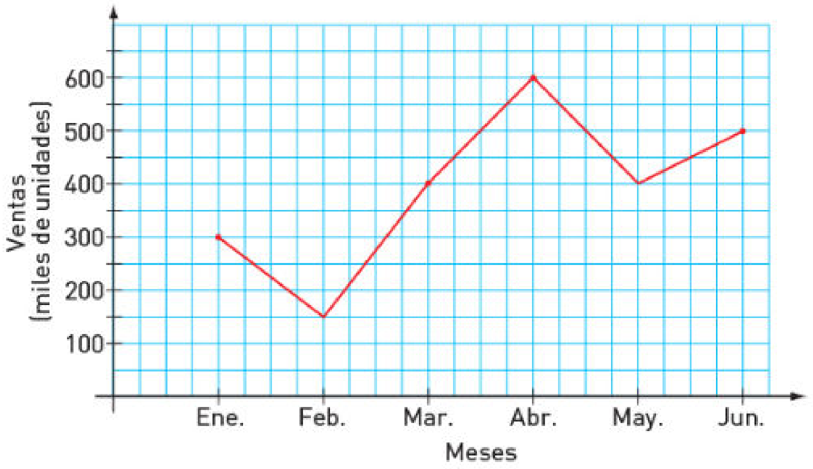
## Interpretación y elaboración de gráficas I

**PREGUNTA INICIAL**

¿Qué gráficas conoces que se formen con segmentos de recta?

**1** En la gráfica siguiente se muestra la evolución de ventas de un producto durante un semestre. Analízala y responde las preguntas.

a) ¿En qué mes hubo más ventas? ______




b) ¿En qué mes hubo menos ventas? ______

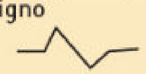
c) ¿Cuáles meses tuvieron la misma cantidad de ventas? ______

d) ¿En qué casos las ventas fueron menores respecto al mes anterior? ______

e) En marzo y abril aumentaron las ventas. ¿En qué periodo fue mayor el aumento, de febrero a marzo o de marzo a abril? ______

**Observa**

En la gráfica, el signo



indica que faltan valores en el eje.

**2** Analiza la siguiente gráfica. En ella se muestran los kilómetros recorridos y el tiempo que empleó un ciclista en una carrera.






a) ¿De cuántos kilómetros es la carrera? ______

b) ¿Entre qué horas la velocidad promedio fue mayor? ______

c) ¿Cuántos kilómetros recorrió entre las 13:00 y las 16:00 horas? ______

d) ¿A qué hora finalizó la carrera? ______

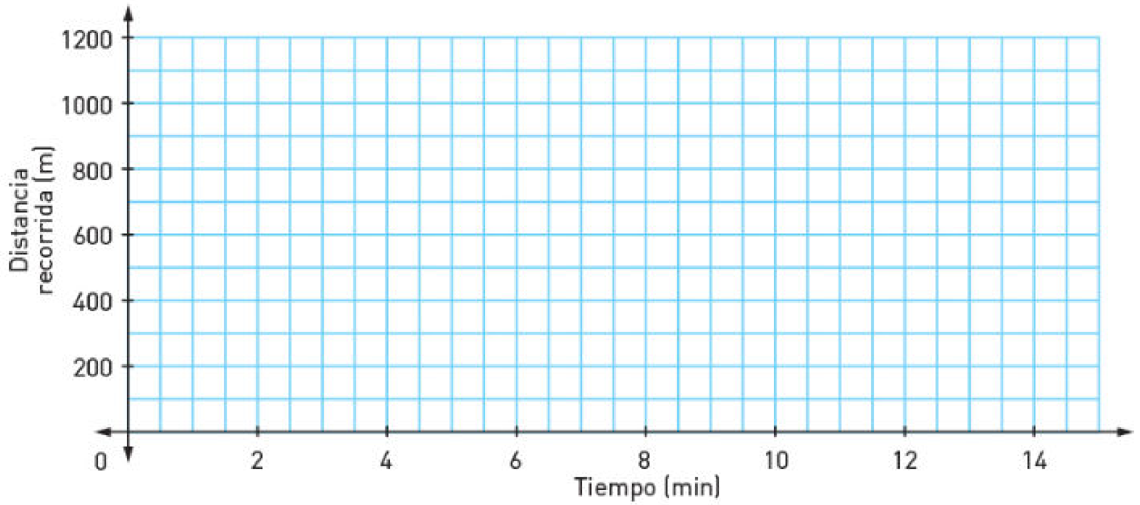
e) ¿Cuánto tiempo tardó en hacer todo el recorrido? ______

f) Según la gráfica, ¿durante qué periodos fue mayor la velocidad del ciclista?
______

g) ¿Cuál fue la velocidad promedio del ciclista? ______

**3** Grafica en el siguiente plano el viaje en bicicleta que se describe a continuación.

a) En los primeros cinco minutos, el ciclista recorrió 600 metros a velocidad constante.
b) Después, aceleró y recorrió 600 metros en dos minutos, también a velocidad constante.




c) El ciclista estuvo detenido durante tres minutos y luego recorrió 400 metros en dos minutos.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten el significado de las rectas en las gráficas.

**4** Para responder la pregunta inicial, comparte con el grupo gráficas formadas por segmentos de recta que encuentres en periódicos o revistas. Compáralas y determinen cuáles cumplen con las características indicadas.

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

## Interpretación y elaboración de gráficas II

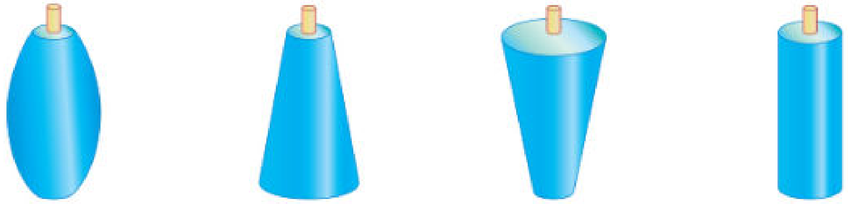
**PREGUNTA INICIAL**

¿Qué puede representarse con una gráfica formada por una curva y una recta?

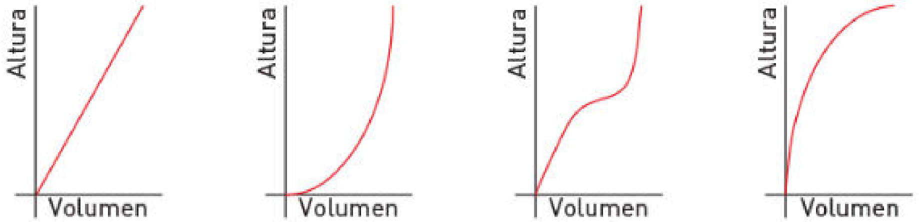
**1** Lee las siguientes situaciones y relaciona cada una con su respectiva gráfica.

a) En un laboratorio hay cuatro recipientes de igual capacidad.

Recipiente *A* Recipiente *B* Recipiente *C* Recipiente *D*



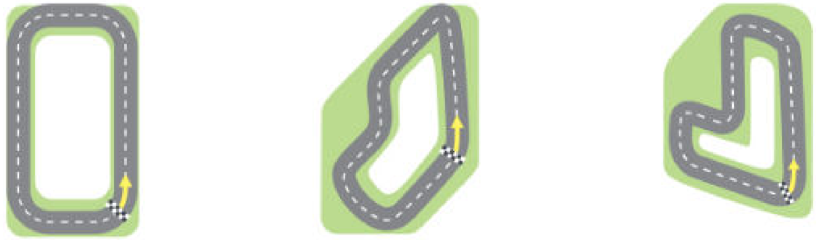
Se llenan los cuatro recipientes en una toma de agua y se anota el volumen de agua y la altura alcanzada. ¿Qué gráfica corresponde a cada recipiente? Escribe en el paréntesis la letra que corresponda.



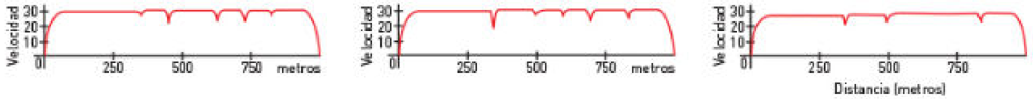

( ) ( ) ( ) ( )

b) En un campeonato de *karts* se recorren estos tres circuitos de igual longitud. La velocidad máxima permitida es 30 km/h.

Circuito *A* Circuito *B* Circuito *C*



En las gráficas se relacionan la velocidad y los metros recorridos. ¿Qué gráfica representa a cada circuito? Escribe en los paréntesis la letra que corresponda.




( ) ( ) ( )

- Comenta tus respuestas con tus compañeros. Expliquen cómo eligieron cada gráfica.

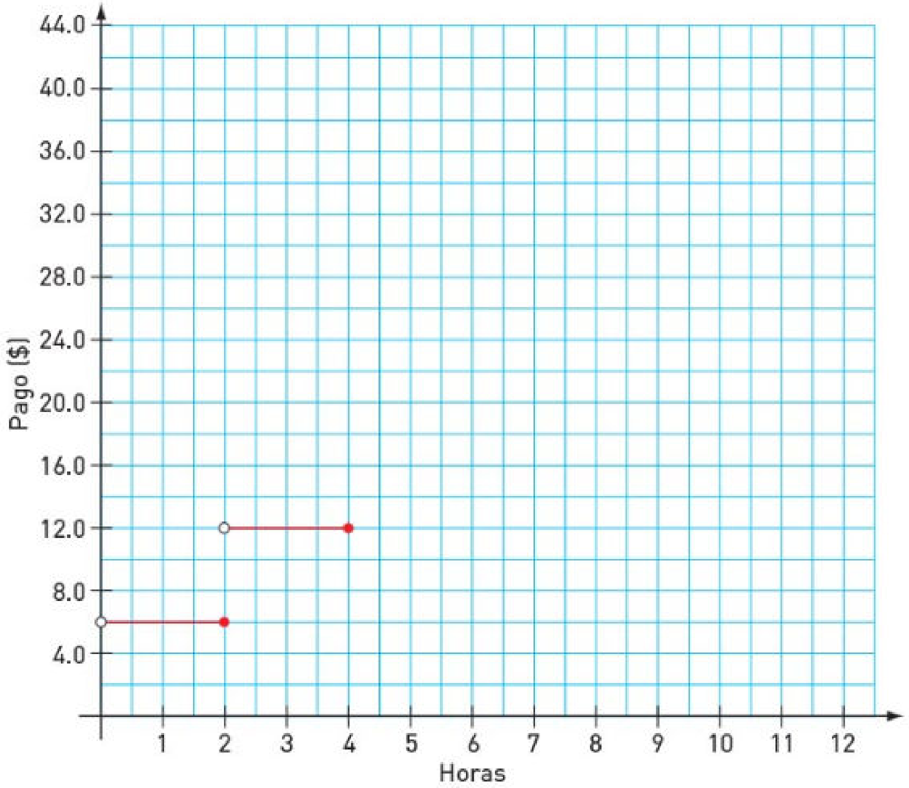




**2** A continuación se presentan las tarifas de un estacionamiento en el que no se cobran fracciones de hora. Haz lo que se indica.

a) Completa la gráfica con los datos que tiene la tabla.

| | Tarifa por hora |
|---|---|
| Las dos primeras horas | $6.00 |
| Las dos horas siguientes | $5.00 |
| A partir de la quinta hora | $4.00 |
| A partir de la sexta hora | $2.00 |




**Observa**

El punto blanco en el extremo izquierdo indica que en ese punto no hay valores.

b) Martín se estacionó 3 horas y 40 minutos. ¿Cuánto debe pagar? ____________

c) ¿Es posible que dos usuarios paguen lo mismo aunque los tiempos de estacionamiento sean distintos? ____________

d) Valeria pagó $26.00. ¿Cuánto tiempo dejó su automóvil en el estacionamiento? ____________

**3** Para responder la pregunta inicial, trabajen en equipos de tres integrantes. Sugieran casos en los que puedan usarse gráficas como la mencionada inicialmente. Compartan sus resultados con los demás equipos.

**TIC**

Ingresa al sitio <arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b03_t07_s01_descartes/index.html>. Elabora un recipiente y encuentra la gráfica de llenado. Compara tu recipiente y su gráfica con la de un compañero y discutan por qué la gráfica tiene esa forma.

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

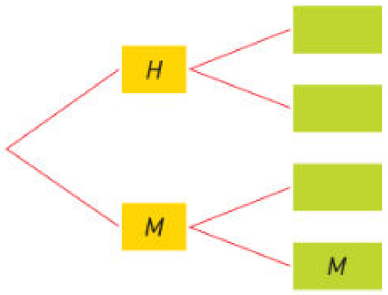
# Regla del producto

PREGUNTA INICIAL

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda dos veces caigan dos águilas?

**1 Lee el problema, completa el diagrama de árbol y responde las preguntas.**

Una pareja desea tener dos hijos. Si la probabilidad de tener niño o niña es igual, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean mujeres?




a) ¿Cuántos casos son en total? ____________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hijos sean de sexo femenino? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer hijo sea niña? ____________

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo hijo sea niña? ____________

e) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niños? ____________

f) ¿El sexo del primer hijo influye en el sexo del segundo? ____________

g) ¿La probabilidad anterior puede calcularse como la suma de las probabilidades que calculaste en los incisos d) y e)? ________ ¿Por qué? ____________

____________

h) ¿La probabilidad del inciso f) puede obtenerse con el producto de las probabilidades que calculaste en los incisos d) y e)? ______ ¿Por qué? ____________

____________

**2 Considera el experimento de lanzar un dado y una moneda y contesta en tu cuaderno.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila al lanzar la moneda?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 al lanzar el dado?
c) ¿El resultado en la moneda influye en el del dado?
d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila y 4 al lanzar el dado? ¿Se puede calcular multiplicando la probabilidad de obtener águila y la de obtener 4?
e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener sol y un número mayor que 2?
f) ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila y un número par?

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Para hacerlo, consideren la información siguiente y tómenla en cuenta para elaborar sus conclusiones.

Al lanzar una moneda y un dado, obtener sol y 2 es un evento compuesto por los eventos independientes: obtener sol y obtener 4.





**3 Contesta en tu cuaderno.**

a) En una bolsa hay 15 pelotas rojas y 10 verdes.

¿Cuál es la probabilidad de extraer una pelota roja de la bolsa?
¿Cuál es la probabilidad de extraer una pelota verde de la bolsa?

b) Se extrae una pelota de la bolsa y se regresa, después se extrae otra.

¿Cuál es la probabilidad de extraer dos pelotas rojas?
¿Cuál es la probabilidad de extraer dos pelotas verdes?
¿Cuál es la probabilidad de extraer primero una pelota verde y después una roja?
¿La primera extracción afecta a la segunda? ¿Por qué?

c) Se extrae una pelota de la bolsa, no se regresa, después se extrae otra.

¿Cuál es la probabilidad de extraer dos pelotas rojas?
¿Cuál es la probabilidad de extraer dos pelotas verdes?
¿Cuál es la probabilidad de extraer primero una pelota verde y después una roja?
¿La primera extracción afecta a la segunda? ¿Por qué?

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y determinen en qué caso, b) o c), las probabilidades se calculan multiplicando las que se calcularon en el inciso a). Redacta en tu cuaderno una explicación de esto, básate en la información del recuadro.

La probabilidad de un *evento compuesto* por eventos independientes es el *producto de las probabilidades* de cada suceso independiente.

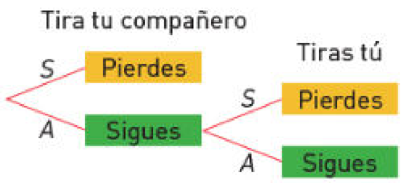
**4 Recuerda el juego de la página 57. Observa los casos en las ramas de los diagramas de árbol y contesta.**

a) Si comienzas el juego y decides "tirar".


¿Cuál es la probabilidad de que pierdas?

____________

b) Si comienzas el juego y dices "paso".




¿Cuál es la probabilidad de que pierdas?

____________

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Determinen si es mejor tirar o ceder el turno en la primera jugada y expliquen por qué.

**5 Para responder la pregunta inicial, reúnanse en equipo y determinen cómo se calcula la probabilidad de la situación indicada al inicio.**

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

## Problemas de probabilidad

PREGUNTA INICIAL

Al hacer dos lanzamientos seguidos desde la línea de tiro libre, un jugador de basquetbol acierta el primer tiro 80% de las veces y ambos tiros 72% de las veces. ¿La probabilidad de acertar en el segundo tiro también es 80%? ¿El primero y el segundo lanzamiento son eventos independientes?

**1** Recuerda los dados de la página 150 y contesta.

4 caras | 6 caras | 8 caras | 12 caras | 20 caras

a) Si se lanzan el dado negro y el morado, ¿cuál es la probabilidad de obtener 4 en ambos? ____________

b) Si se lanzan el dado rojo y el verde, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar en ambos? ____________

c) Si se lanzan el dado negro y el verde, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 5? ____________

d) Si se lanzan dos dados verdes, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 23? ____________

e) Si se lanzan un dado morado y uno azul, ¿cuál es la probabilidad de no obtener ningún 4? ____________

f) Si se lanzan un dado rojo y uno verde, ¿cuál es la probabilidad de que la suma no sea 17? ____________

g) ¿Con qué dados la probabilidad de obtener en ambos el número dos es $\frac{1}{48}$? ____________

h) ¿Con qué dados la probabilidad de obtener en ambos un número menor que 3 es $\frac{1}{6}$? ____________

i) ¿Con qué dados la probabilidad de obtener dos números que sumen 2 es $\frac{1}{32}$? ____________

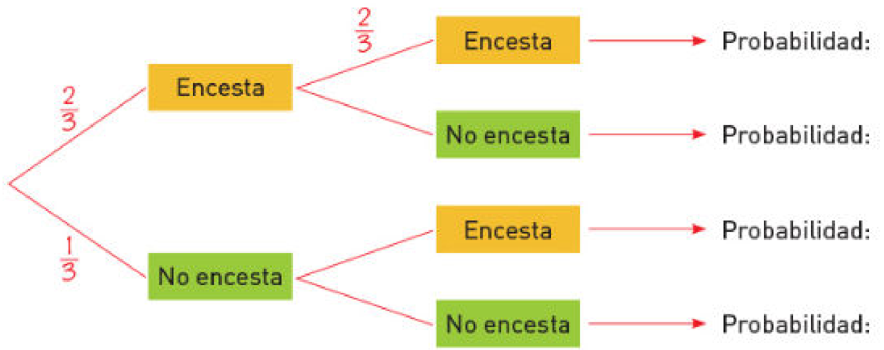
j) ¿La probabilidad de obtener dos números pares es la misma con cualquier par de dados? ________ ¿Por qué? ____________





**2** Escribe las probabilidades en cada rama del diagrama y calcula las probabilidades de cada evento compuesto.

Probabilidad de que un jugador de basquetbol enceste en un tiro libre




a) ¿Cuál es la probabilidad de que enceste los dos tiros? ____________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que falle los dos tiros? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que falle un tiro? (Nota que hay dos casos.) ____________

**3** Resuelve los problemas.

a) La probabilidad de obtener solamente águilas al lanzar *n* veces una moneda es $\frac{1}{32}$. ¿Cuál es el valor de *n*? ____________

b) ¿Con cuántos lanzamientos de una moneda la probabilidad de obtener únicamente águilas es $\frac{1}{1\,024}$? ____________

c) Una moneda se ha modificado de manera que la probabilidad de obtener águila es $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo águilas en cuatro lanzamientos? ____________

d) En una cadena de montaje de coches intervienen tres robots para soldar una pieza. Las probabilidades de falla de cada robot son 0.01, 0.02 y 0.015, respectivamente. Completa las siguientes probabilidades.

La probabilidad de que fallen los tres robots es ________. La probabilidad de que la soldadura salga perfecta es ________; es decir, que ninguno de los robots falle. Finalmente, la probabilidad de que al menos uno de los robots falle es ________.

- Revisa con el grupo las respuestas y justifíquenlas.

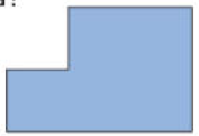
**4** Trabaja con un compañero para responder la pregunta inicial. Recuerden el concepto de eventos independientes y aplíquenlo en su justificación.

**TIC**
Ingresa al sitio <www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137669>. Observa la presentación y diseña un problema que se resuelva con la regla del producto. Haz una exposición de éste ante el grupo.

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Analiza las siguientes preguntas y subraya la respuesta correcta.

**1** La parte frontal del patio de la casa de Angélica mide 10 m; consta de dos secciones cuadradas, como se muestra en la figura, de 58 m² de área total. ¿Cuánto miden los lados de cada sección cuadrada?

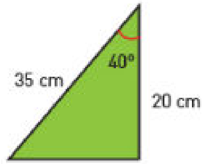


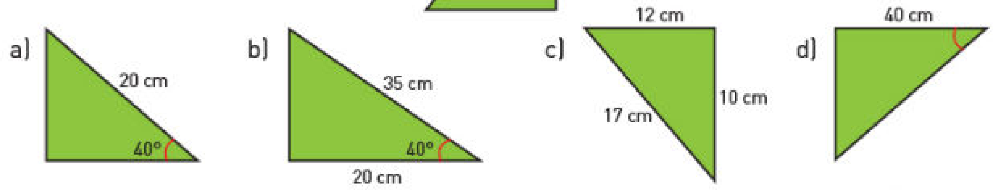
a) 7 m y 3 m  b) 5 m y 5 m  c) 8 m y 2 m  d) 6 m y 4 m

**2** El área del rectángulo $ABCD$ es 2 301.75 unidades cuadradas. Los lados del rectángulo pequeño son tres veces más chicos que los del $ABCD$. ¿Cuál es la ecuación que permite calcular el valor de $x$?

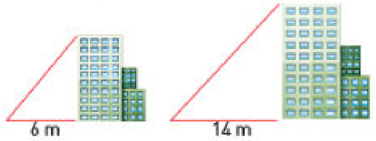

a) $x^2 + x = 255.75$  b) $9x^2 + 9x = 255.75$  c) $x^2 + x = 767.25$  d) $9x^2 + 9x = 767.25$

**3** ¿Qué triángulo es congruente con el de la derecha?



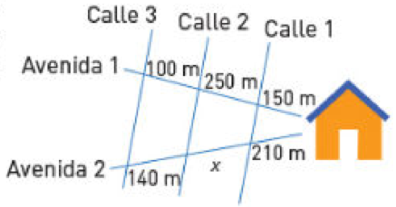




**4** Dos edificios cercanos proyectan a la misma hora del día sombras de 14 m y 6 m, respectivamente. Si el edificio pequeño mide 15 m de altura, ¿qué altura alcanza el grande?




a) 23 m  b) 31 m  c) 32 m  d) 35 m

**5** Sebastián puede llegar a su casa por cualquiera de dos avenidas intersecadas por tres calles paralelas. La figura de la derecha muestra algunas distancias entre las calles.

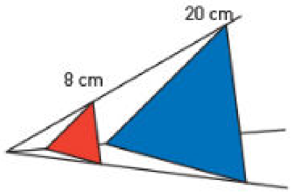



¿Qué distancia recorre Sebastián de la calle 1 a la 2, cuando transita sobre la avenida 2?

a) 310 m  b) 110 m  c) 290 m  d) 350 m

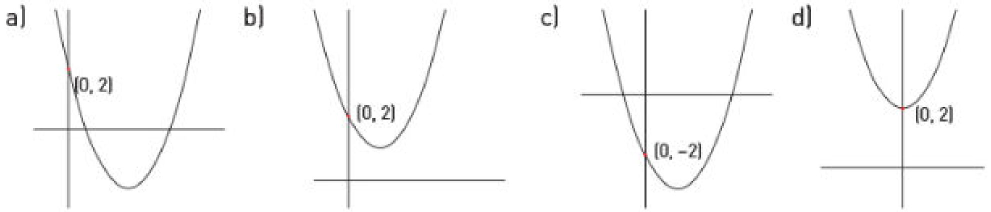


**6** ¿Cuál es la razón de homotecia que hay entre el triángulo rojo y el azul?

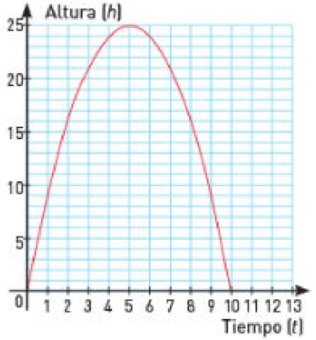



a) 12  b) −12  c) 2.5  d) −2.5

**7** ¿Qué gráfica corresponde a la ecuación $y = x^2 - 2x + 2$?

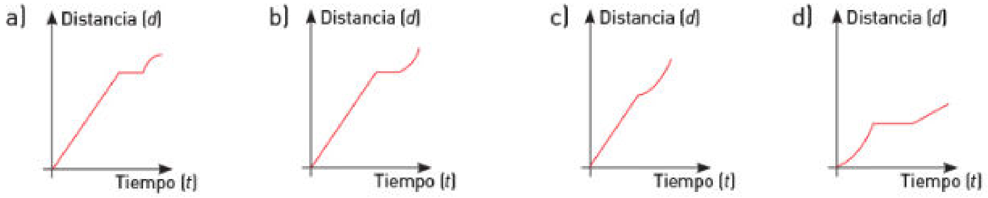



**8** La gráfica muestra la relación entre la altura ($h$) que alcanza una pelota lanzada al aire y el tiempo transcurrido ($t$) desde que se soltó. ¿Qué expresión corresponde a la gráfica?




a) $h = -t^2 + 10t$  b) $h = -t^2 + 8t$
c) $h = -t^2 - 10t$  d) $h = -t^2 - 8t$

**9** En el trayecto de su casa a la escuela, Arturo comenzó a caminar con rapidez constante, después se detuvo a platicar unos minutos y finalmente corrió muy rápido al principio y disminuyó su rapidez conforme avanzaba. ¿Qué gráfica muestra la rapidez de Arturo durante el trayecto?

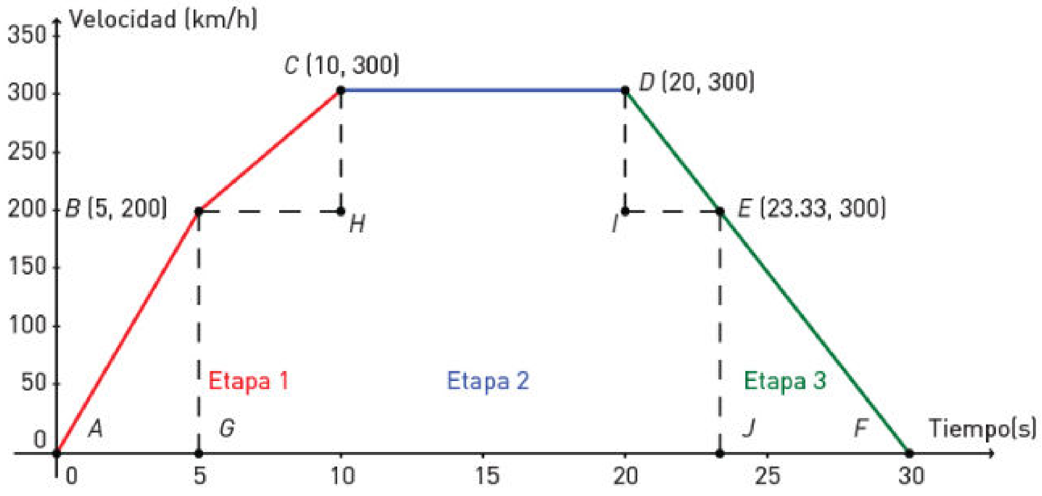



**10** En una rifa escolar hay cuatro urnas ($A$, $B$, $C$ y $D$) y cada una contiene 10 pelotas numeradas (de 0 a 9). Pedro sacará, en ese orden, una pelota de cada urna para formar un número de cuatro cifras. Para ganar un premio necesita formar un número con puras cifras impares; por ejemplo, 1 357 o 3 333. ¿Qué probabilidad tiene de lograrlo?

a) $\frac{1}{2}$  b) $\frac{1}{4}$  c) $\frac{1}{8}$  d) $\frac{1}{16}$

Lee la información y responde lo que se pide.

La siguiente gráfica corresponde a tres etapas de una prueba de un auto de carreras.




**Pregunta 1.** Describe brevemente las tres etapas de la prueba.

______________________________

______________________________

______________________________

**Pregunta 2.** ¿Qué distancia recorrió el vehículo durante la etapa 2?

______________________________

**Pregunta 3.** Califica cada afirmación como falsa (F) o verdadera (V)

| Afirmación | ¿F o V? |
|---|---|
| Se recorrió la misma distancia durante las etapas 1 y 3 . | |
| En la etapa 2 el automóvil se desplazó a velocidad constante. | |
| La aceleración durante la etapa 1 fue siempre la misma. | |
| El vehículo desaceleró de manera constante durante la etapa 3. | |

**Pregunta 4.** ¿A qué ritmo desaceleró el automóvil durante la etapa 3?

______________________________

**Pregunta 5.** ¿Por qué los triángulos *DIE* y *EJF* son semejantes, pero los triángulos *AGB* y *BHC* no lo son? ______________________________

______________________________

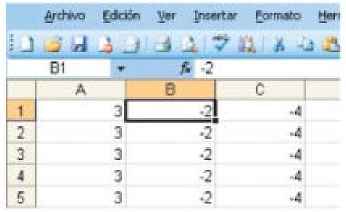




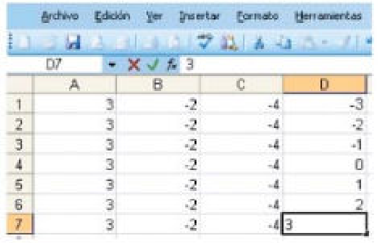
## Gráficas de ecuaciones cuadráticas en la hoja de cálculo

Con la hoja de cálculo se pueden evaluar y graficar ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, para la ecuación $y \cdot 3x^2 \cdot 2x \cdot 4$ podemos hacerlo de la siguiente manera.

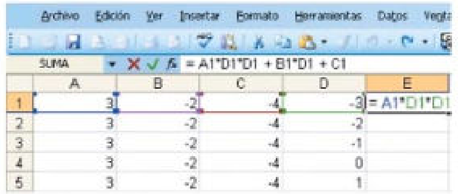
1. En la celda *A1* se anota el **coeficiente** de $x^2$, es decir, 3; en la celda *B1*, el coeficiente de $x$ (–2); y en *C1* el término independiente (–4). Repite lo mismo en las celdas *A2*, *B2* y *C3*, y así en tantas filas como valores quieras evaluar.



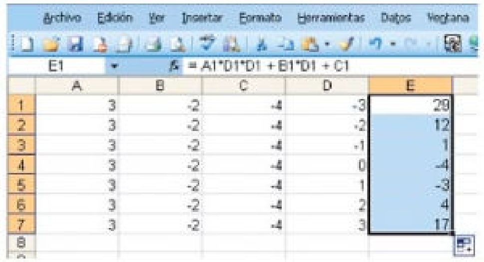
2. En la columna *D* anota los valores de $x$ para los que quieres evaluar la función. Por ejemplo, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3.



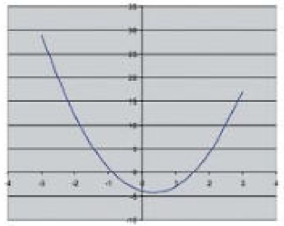
3. En la celda *E1* anota = A1*D1*D1 + B1*D1 + C1.



4. Selecciona la celda *E1* y, con el ratón, arrastra el cuadrito inferior derecho hasta la celda *E7*.



5. Selecciona las columnas *D* y *E* (de *D1* a *E7*). En el menú, escoge *Insertar* > Gráfico. Aparecerá un cuadro de diálogo, ahí escoge *XY* (*Dispersión*) y luego el icono . Escoge *Siguiente*, *Siguiente* y *Finalizar*. La gráfica aparecerá en la hoja.



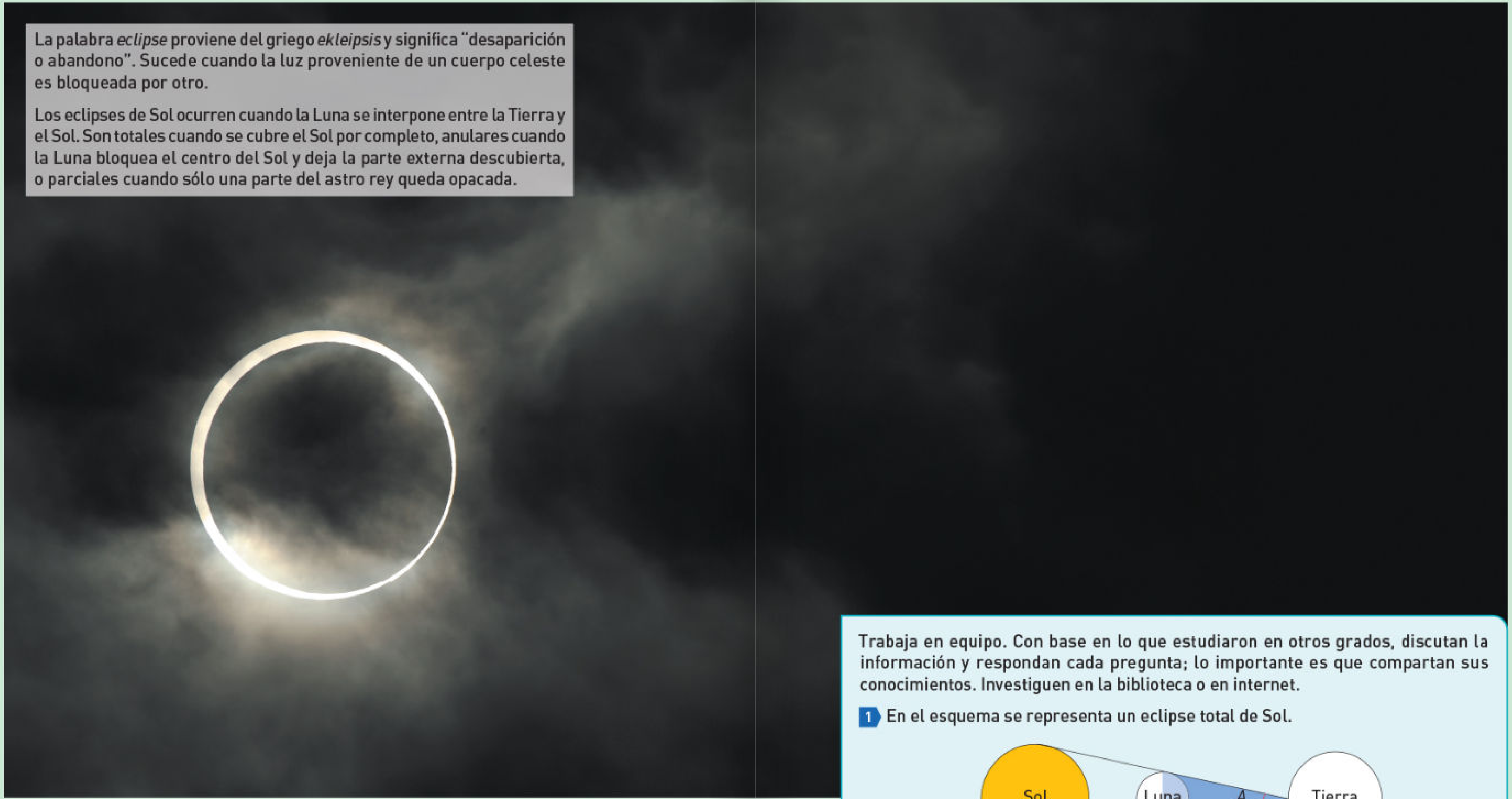
## Autoevaluación

Analiza tu desempeño respecto a los aprendizajes esperados del bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

| | Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos | Lo hago solo | Lo hago con ayuda de otros | Necesito la ayuda del profesor |
|---|---|---|---|---|
| Resolver problemas que implican plantear y resolver ecuaciones de segundo grado. | | | | |
| Resolver problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura. | | | | |

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.

# BLOQUE 4



La palabra *eclipse* proviene del griego *ekleipsis* y significa “desaparición o abandono”. Sucede cuando la luz proveniente de un cuerpo celeste es bloqueada por otro.

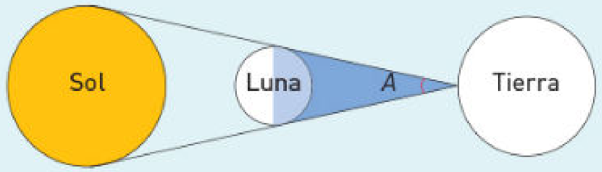
Los eclipses de Sol ocurren cuando la Luna se interpone entre la Tierra y el Sol. Son totales cuando se cubre el Sol por completo, anulares cuando la Luna bloquea el centro del Sol y deja la parte externa descubierta, o parciales cuando sólo una parte del astro rey queda opacada.

## Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Trabaja en equipo. Con base en lo que estudiaron en otros grados, discutan la información y respondan cada pregunta; lo importante es que compartan sus conocimientos. Investiguen en la biblioteca o en internet.

**1** En el esquema se representa un eclipse total de Sol.




a) Suponiendo que la sombra proyectada en la Tierra es un punto, ¿cuál es la forma de la sombra de la Luna?

b) ¿Cómo hallarías la distancia entre la Tierra y el Sol empleando la siguiente información?

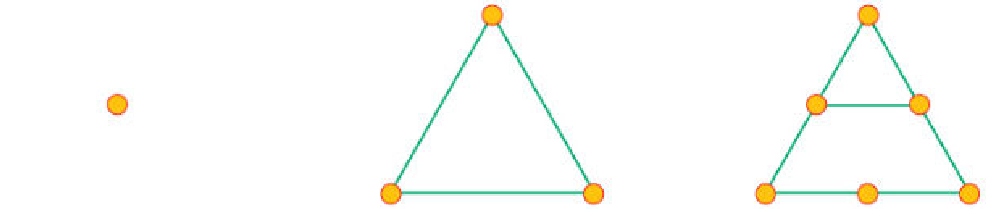
Radio de la Luna: 1 722 km  Ángulo $A = 0.257°$

Radio del Sol: aproximadamente 400 veces el de la Luna

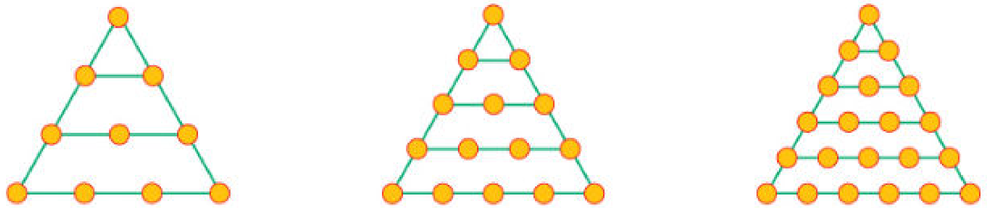
## Los números poligonales

Los números poligonales son sucesiones de números que se pueden representar con sucesiones de polígonos regulares. Fueron los pitagóricos quienes los descubrieron al representar los números con piedras o guijarros.

Por ejemplo, los siguientes son números triangulares.



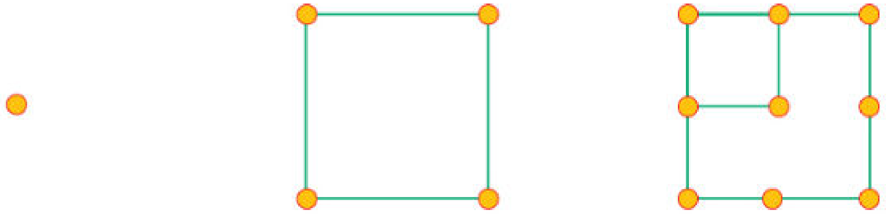
1 3 6



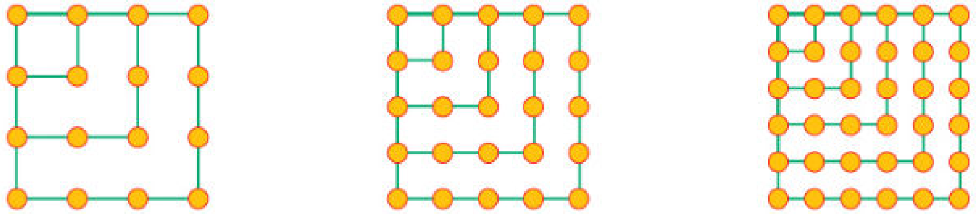
10 15 21

Observa que se empieza con el 1 y luego se van formando triángulos equiláteros.

Los siguientes son los números cuadrados.



1 4 9



16 25 36



## Retos

Efectúa lo que se pide.

a) ¿Cuáles son los tres números triangulares que siguen en la sucesión de la página anterior? Dibuja su representación en el siguiente espacio.

b) ¿Cuáles son los tres números cuadrados que siguen en la sucesión de la página anterior? Dibuja su representación en el siguiente espacio.

c) ¿Cómo serían los números pentagonales? Representa los cuatro primeros en el siguiente espacio.

## Sucesiones cuadráticas I

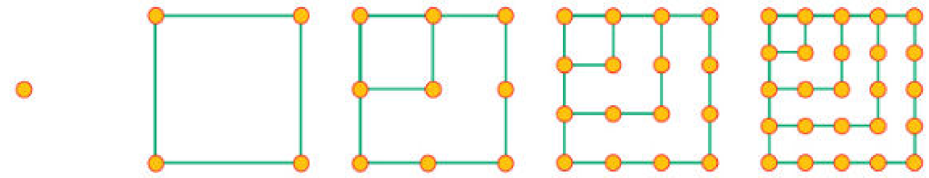
PREGUNTA INICIAL

¿Cuál es la regla de la sucesión 1, 2, 7, 14, 23, 34...?

**1** Analiza la siguiente situación, recuerda los números cuadrados y después responde las preguntas.

Un ingeniero en iluminación está haciendo pruebas de arreglos con leds para una presentación. Para ello hizo esquemas como el siguiente, en el que cada punto representa un led.

Cuadrado 1 | Cuadrado 2 | Cuadrado 3 | Cuadrado 4 | Cuadrado 5



1 | 4 | 9 | 16 | 25

a) ¿Cuántos puntos tiene cada lado del cuadrado 2? ______ ¿Cuántos puntos tiene en total? ______

b) ¿Cuántos puntos tiene cada lado del cuadrado 3? ______ ¿Cuántos puntos tiene en total? ______

c) ¿Cuántos puntos tiene cada lado del cuadrado 5? ______ ¿Cuántos puntos tiene en total? ______

d) ¿Cuántos puntos debe tener cada lado del cuadrado 8? ______ ¿Y cuántos en total? ______

e) ¿Cuántos puntos debe tener el lado del cuadrado 79? ______ ¿Y cuántos en total? ______ ¿Cómo los calculaste? ______

f) ¿En la sucesión hay un cuadrado de 420 puntos? ______ ¿Por qué? ______

g) ¿Cuántos puntos tendrá en total un cuadrado que ocupe la posición *n* en la sucesión, donde *n* representa cualquier entero positivo? ______ ¿Por qué? ______

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Utilicen la expresión encontrada en el inciso g) para responder las siguientes preguntas.

h) ¿Cuántos leds debe tener el lado del cuadrado 345? ______

i) ¿Cuál es el arreglo que tiene 207 936 leds en total? ______

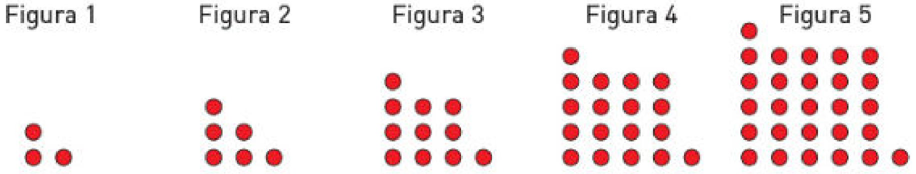
j) ¿Hay un cuadrado que contenga 58 082 puntos? ______ ¿Por qué? ______





**2** Analiza la sucesión. Anota cuántos puntos tiene cada una y contesta en tu cuaderno.

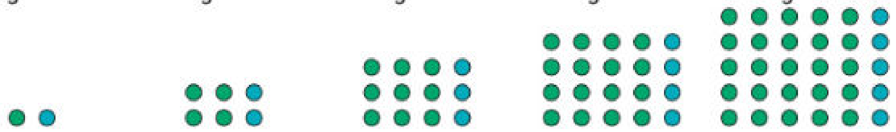
Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4 | Figura 5



a) ¿Cuántos puntos debería tener la figura 9? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos puntos debería tener la figura 38? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cómo cambia el número de puntos de una figura a la siguiente?
d) ¿Cuál es la relación entre esta sucesión y la de los números cuadrados?
e) Anota una expresión algebraica que te permita calcular los puntos que tiene la figura *n*. ¿Cómo la determinaste?
f) ¿El número 65 538 está en la sucesión? Puedes usar tu calculadora para determinarlo. Explica por qué.

**3** Observa la sucesión. Anota cuántos puntos tiene cada una y contesta en tu cuaderno.

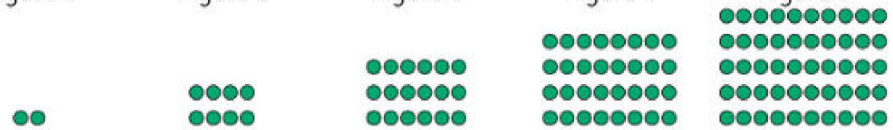
Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4 | Figura 5



a) ¿Cuántos puntos debería tener la figura 10? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cómo cambia el número de puntos de una figura a la siguiente?
c) ¿Cuál es la relación entre esta serie y la de los números cuadrados?
d) Encuentra una expresión algebraica que permita calcular los puntos que tiene la figura *n*. ¿Cómo la determinaste?

**4** Analiza las figuras, escribe el número de puntos en las líneas y contesta la pregunta.

Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4 | Figura 5



a) Anota una expresión algebraica que te permita calcular los puntos que tiene la figura *n*. ¿Cómo la determinaste? ______

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y justifíquenlas. Determinen si las expresiones algebraicas que anotaron son correctas.

**5** Para responder la pregunta inicial, analicen en grupo la sucesión y desarrollen la respuesta en el pizarrón. Escriban la expresión algebraica que rige esta serie.

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

## Sucesiones cuadráticas II

**PREGUNTA INICIAL**

¿Cuál es la regla de la sucesión 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27...?

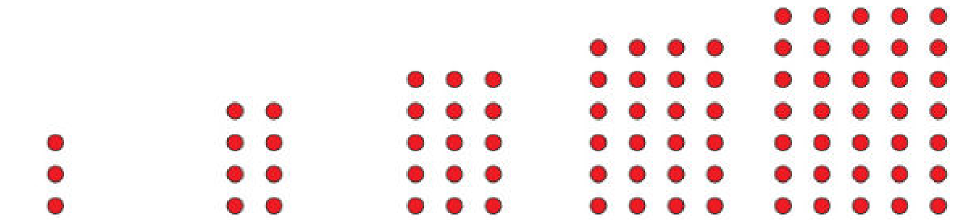
**Recuerda**
La *regla de una sucesión* es la que te permite determinar cualquier término de ésta, la cual puede ser una expresión algebraica.

**1** Escribe los siguientes dos términos de las sucesiones y su regla. Considera las sucesiones de la lección anterior.

| Sucesión | Regla |
|---|---|
| a) 2, 5, 10, 17, 26, ______, ______ | ______ |
| b) 1, 7, 17, 31, 49, ______, ______ | ______ |
| c) 1, 5, 11, 19, 29, ______, ______ | ______ |
| d) 6, 9, 14, 21, 30, ______, ______ | ______ |
| e) −1, 2, 7, 14, 23, ______, ______ | ______ |

**2** Anota el número de puntos que tiene cada figura de las sucesiones y contesta en tu cuaderno. Justifica tus respuestas.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5



______ ______ ______ ______ ______

a) ¿Cuántos puntos debería tener la figura 6?
b) ¿Cuántos puntos debería tener la figura 7?
c) ¿Cuántos puntos debería tener la base de la figura 8?
d) ¿Cuántos puntos debería tener la altura de la figura 8?
e) ¿Cómo calcularías el total de puntos de la figura 8 usando los datos de los incisos anteriores?
f) ¿Cuántos puntos debería tener la base de la figura 9?
g) ¿Cuántos puntos debería tener la altura de la figura 9?
h) ¿Cómo calcularías el total de puntos de la figura 9 usando los datos de f) y g)?
i) ¿Cuántos puntos debe tener la base de una figura *n*, si *n* representa un número cualquiera?
j) ¿Cuántos puntos debe tener la altura de una figura *n*, si *n* representa un número cualquiera?
k) ¿Cuántos puntos en total debe tener una figura *n*, si *n* representa un número cualquiera?
l) ¿Cuántos puntos debería tener la figura 36?

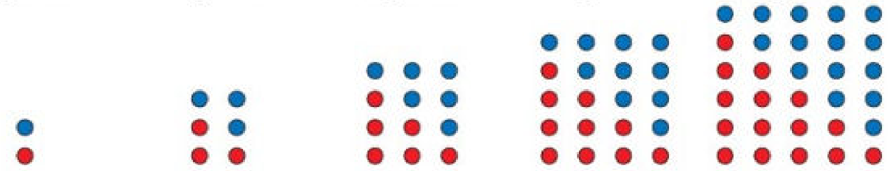
- Reúnete en equipo para comparar respuestas y corregirlas si es necesario. Justifiquen ante el grupo cómo encontraron la expresión del inciso k) y escríbanla de distintas maneras.





**3** Escribe cuántos puntos tiene cada figura de la sucesión y contesta en tu cuaderno.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

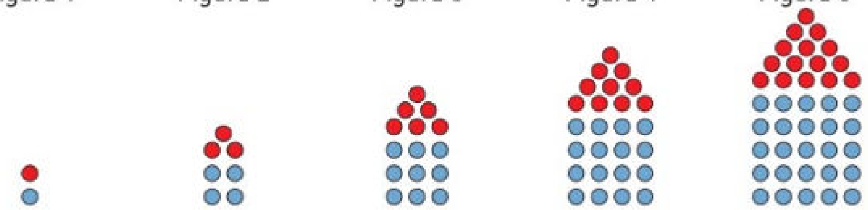


______ ______ ______ ______ ______

a) ¿Cuál es la regla de la sucesión de números formada por la cantidad de puntos?
b) ¿Cuál es la regla de la sucesión de números formada por la cantidad de puntos rojos?
c) ¿Qué relación tiene la sucesión con la de los números triangulares de la página 170?
d) ¿Qué relación guarda la expresión que anotaste con la expresión que hallaste en la actividad 1 de la página 24?

**4** Escribe en las líneas cuántos puntos tiene cada figura y contesta en tu cuaderno.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

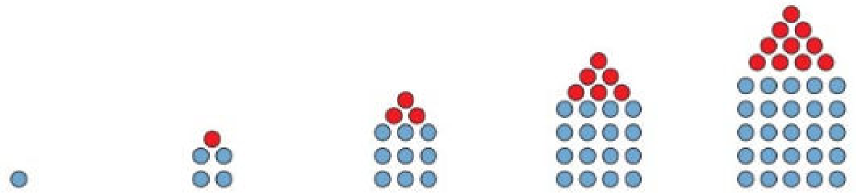


______ ______ ______ ______ ______

a) ¿Cuál es la regla de la sucesión de números formada por la cantidad de puntos? ¿Por qué?

**5** Anota la cantidad de puntos en cada figura y responde las preguntas en tu cuaderno.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5



______ ______ ______ ______ ______

a) ¿Cuál es la regla de la sucesión de números formada por la cantidad de puntos? ¿Por qué?
b) ¿Esta regla se relaciona con la de los números pentagonales? ¿Por qué?

**6** Trabajen en equipos de cuatro integrantes para responder la pregunta inicial. Analicen la regla de sucesión correspondiente y después comenten con el grupo de qué manera lo hicieron.

**TIC**
Ingresa al sitio <arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/> y haz clic en el número 20 de la lista de recursos que ahí encontrarás. Es una aplicación que te permite hallar la regla general de sucesiones cuadráticas. En el salón, comparte con tus compañeros lo que aprendiste.

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

## Rehilete geométrico

Consigue el siguiente material y lleva a cabo las actividades.

- Palitos de plástico o de madera (cuatro o cinco)
- Cartulina de colores
- Cinta adhesiva, pegamento y tijeras

a) Recorta medio círculo de cartulina y pégalo en el palito, como se ve en la fotografía.

b) Haz girar el palito.
Si lo giras con suficiente rapidez, podrás ver un cuerpo geométrico.

¿Cuál es? ____________________

____________________



c) Ahora recorta un rectángulo y ponlo en el palito.

¿Qué figura crees que se formará al girarlo? ____________________

____________________

d) Después corta un triángulo rectángulo y pégalo en el palito por uno de sus catetos.

¿Qué figura se formará al girarlo?

____________________

____________________

e) Investiga qué cuerpos geométricos se forman al hacer girar otras figuras geométricas.

## Sólidos de revolución

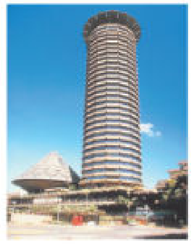
**PREGUNTA INICIAL**

¿Qué es un sólido de revolución?

**1** Observa los cuerpos y contesta.

Cilindros





a) ¿Qué forma tienen? ______

b) ¿Cuántas caras curvas tiene cada uno y cómo son? ______

c) ¿Cuántas caras planas tiene cada uno y cómo son? ______

Conos



d) ¿Qué forma tienen? ______

e) ¿Cuántas caras curvas tiene cada uno y cómo son? ______

f) ¿Cuántas caras planas tiene cada uno y cómo son? ______

______

Esferas

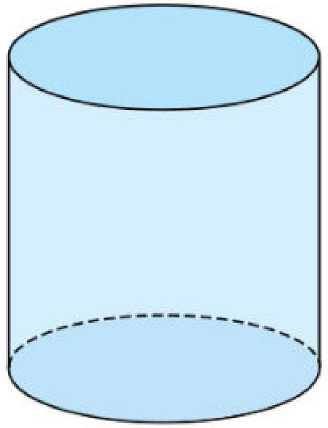
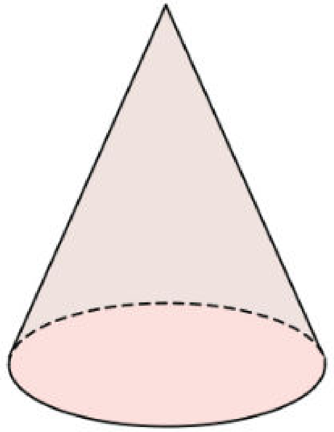


g) ¿Cómo son las caras de estos cuerpos? ______





**2** Recuerda las figuras que usaste en las páginas 176 y 177 para formar estos sólidos en el lugar que corresponde. Después haz lo que se te indica.


a) Remarca con color rojo el lado del rectángulo pegado al palito. Éste es la altura del cuerpo.
b) Con azul, remarca uno de los lados perpendiculares al lado del rectángulo que repasaste en el inciso anterior. Nómbralo *radio de la base*.
c) Remarca con color rojo un radio del semicírculo. Éste es un radio del cuerpo.
d) Repasa con rojo el lado del triángulo que quedó sujeto al palito. Éste es la altura del cuerpo.
e) Con color rojo, remarca la hipotenusa del triángulo. Ésta es la generatriz del cuerpo.
f) Repasa con azul el cateto del triángulo que no quedó sujeto al palito. Éste es el radio de la base.

**3** **Reúnanse en equipos de tres para discutir y contestar lo siguiente en su cuaderno.**

a) Expliquen la relación que hay entre las inclinaciones del radio y la altura del cilindro.
b) Describan la generatriz del cono y expliquen cómo es la cara que se genera al girar este segmento.
c) Expliquen la relación que hay entre las inclinaciones del radio y la altura del cono.
d) Comenten qué relación guardan el radio de la esfera y su diámetro.
e) El cilindro también tiene generatriz. Expliquen cuál es y por qué. También digan qué relación guardan las inclinaciones de la altura y la generatriz.

- Comparen sus respuestas de las preguntas anteriores con las del resto del grupo y, con ayuda del profesor, elaboren una respuesta común para cada una.

**4** Para responder la pregunta inicial, investiga el significado de *sólido de revolución*. Redacta con el grupo una definición al respecto y describan sus características.

**TIC**

Ingresa al sitio <arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b05_t02_s01_descartes/index.html>. Revisa la información que ahí se presenta acerca de los conos y cilindros y escribe en tu cuaderno las principales ideas que encuentres al respecto.

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

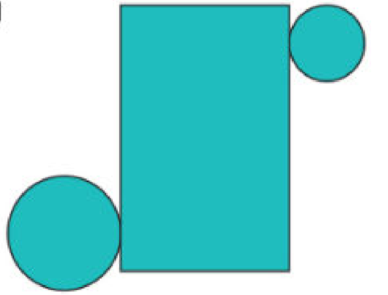
## Desarrollo plano de un cilindro

**PREGUNTA INICIAL**

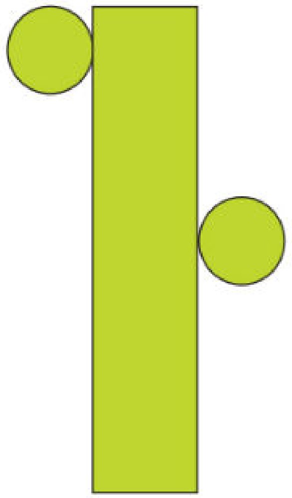
¿Qué relación tienen las medidas de la base de un cilindro con las de su cara curva?

**1** Observa los desarrollos y determina con cuáles se puede armar un cilindro. Explica tus respuestas. Si tienes dudas, cópialos y ármalos.

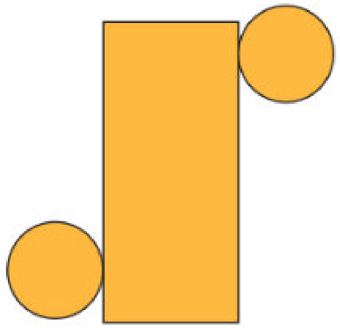
a)



b)



c)



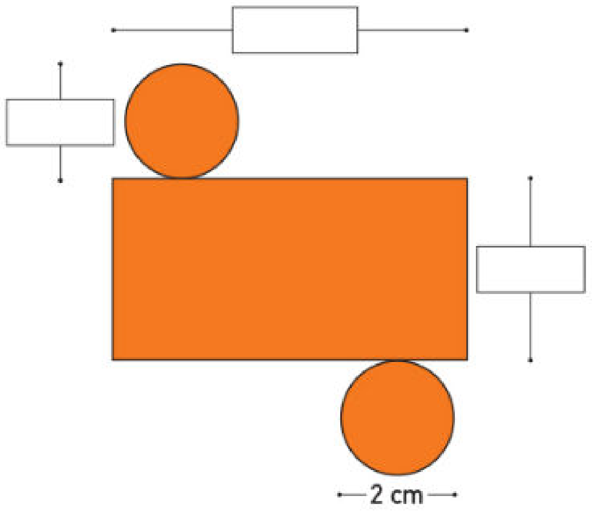
- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y expliquen, en grupo, cómo modificarían cada desarrollo para que sea posible armar un cilindro.



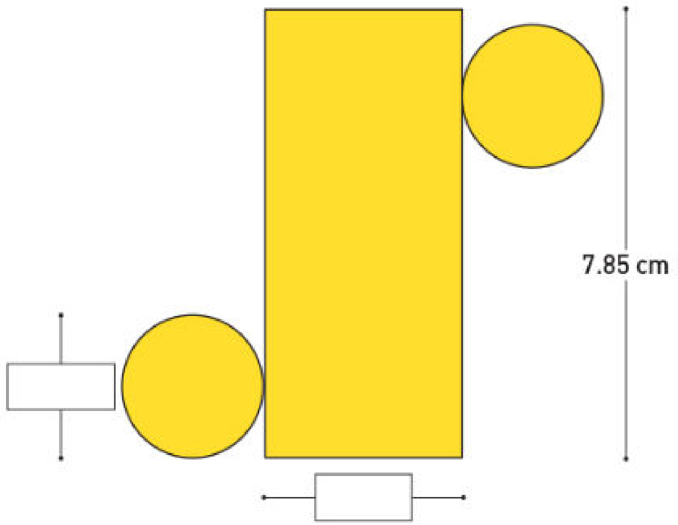


**2** Anota las medidas que faltan en los siguientes desarrollos. Si la medida puede ser cualquiera, escribe una C.

a)




b)




- Comenta al grupo tus procedimientos para hallar las medidas que faltan.

**3** En cartulina haz el desarrollo plano de un cilindro sin una de sus bases. El radio de la base debe medir 3 cm y la altura, 10 cm. Recuerda poner pestañas para pegar las caras. Arma el cilindro, pero déjalo destapado. Guárdalo porque lo utilizarás en otra lección.

**4** Para responder la pregunta inicial, discutan, en grupo y organizados por su profesor, qué medidas son necesarias para construir el desarrollo plano de un cilindro.

**TIC**

Ingresa al sitio <www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cylinder.html> y experimenta con los desarrollos planos de distintos cilindros. Después, explica en tu cuaderno cómo cambia el desarrollo plano de un cilindro si varía su altura o el radio de la base.

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

## Desarrollo plano de un cono

PREGUNTA INICIAL

¿Qué relación tienen las medidas de la base de un cono con las de su cara curva?

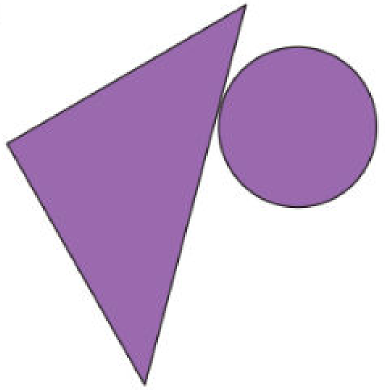
**Observa**

Lee el siguiente libro y aprende diversas técnicas para usar el compás o la regla para trazar desarrollos como los de esta lección:

Bosch Giral, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las formas*, México, SEP-Santillana, 2002.

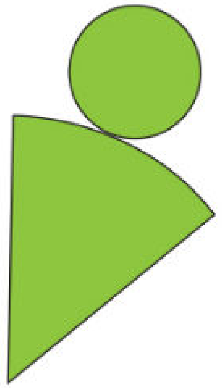
**1** Observa los desarrollos y determina con cuáles se puede armar un cono. Explica tus respuestas. Si tienes dudas, cópialos y ármalos.

a)



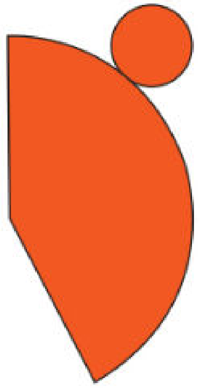
_______________

b)



_______________

c)



_______________

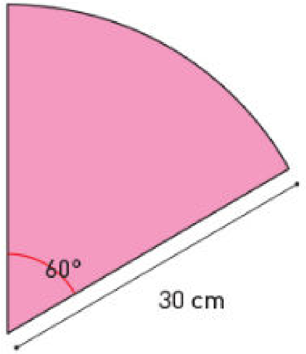
- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y expliquen, en grupo, cómo modificarían cada desarrollo para que sea posible armar un cono.





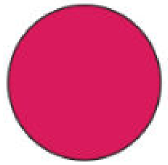
**2** Analiza y contesta.

a) La siguiente es una parte del desarrollo de un cono. Calcula cuánto mide la longitud del arco.



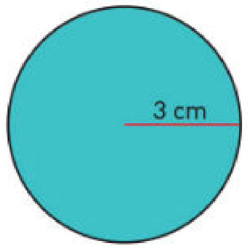

Longitud de arco: _______________

Si este círculo es la base del cono, ¿cuál es la longitud de su radio?

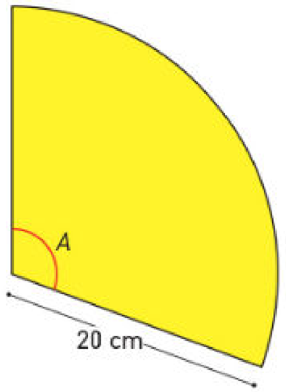


Radio: _______________

b) Esta es la base de un cono.




Si esta es la otra parte del desarrollo del cono, ¿cuánto mide el ángulo *A*?

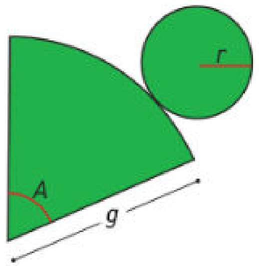



∠*A* = _______________

- Comenta tus procedimientos con tus compañeros.

**3** Responde en tu cuaderno.

Si *g* es la longitud de la generatriz y *r* es el radio de la base, ¿cómo se calcula la medida del ángulo *A*?




**4** Para responder la pregunta inicial, decidan en grupo qué medidas son imprescindibles para construir el desarrollo plano de un cono.

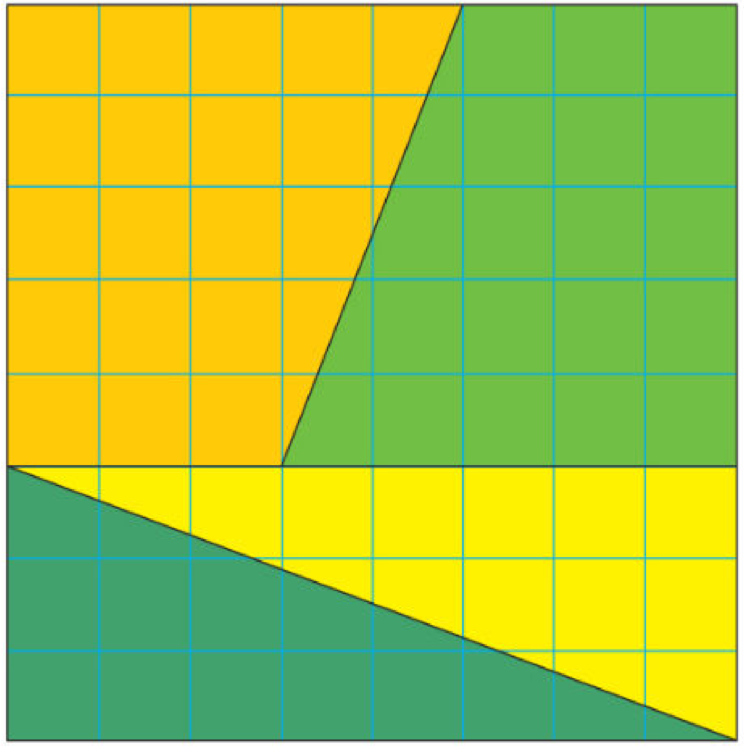
**TIC**

Ingresa al sitio <www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110919_conos.elp/desarrollo_del_cono.html>. Explica en tu cuaderno cómo cambia el desarrollo plano de un cono cuando varía su altura o el radio de la base. Comparte tu respuesta en el salón de clase.

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

## ¿De dónde salió el cuadrito?

Recuerda que en la lección 34 vimos que Yarima estaba jugando con figuras geométricas. Ahora formó este cuadrado con dos trapecios y dos triángulos.



**Analiza las figuras anteriores y contesta las preguntas.**

a) Nota que el cuadrado mide ocho unidades de lado.

¿Cuál es su área? Anótala.

$A =$ _________ $u^2$

b) Calcula el área de cada figura que forma el cuadrado.

Trapecio amarillo: _________ $u^2$ Trapecio verde: _________ $u^2$

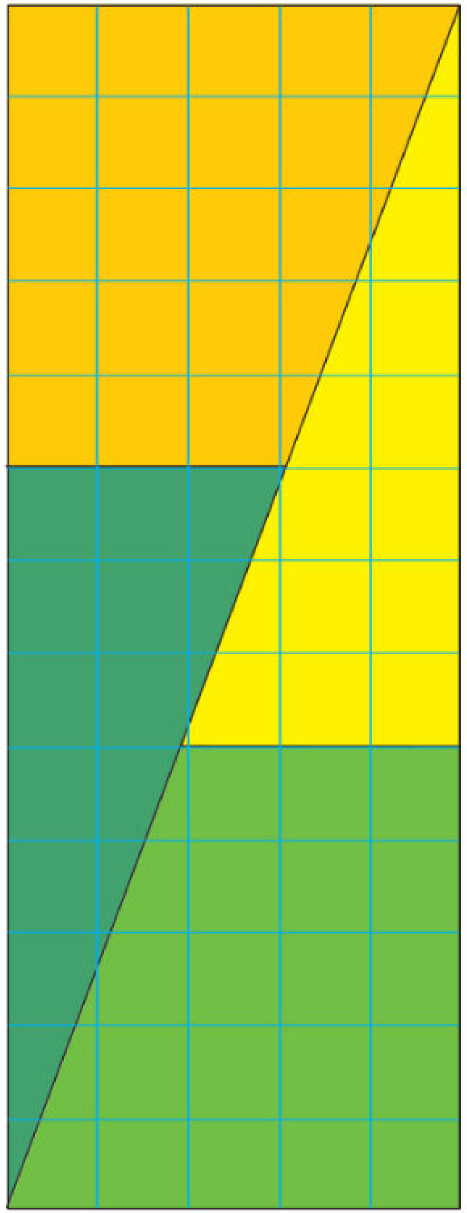
Triángulo amarillo: _________ $u^2$ Triángulo verde: _________ $u^2$

c) Si se arma otra figura con las cuatro piezas, ¿tendrá la misma área que el cuadrado que hizo Yarima? _______ ¿Por qué? ___________________________________________

___________________________________________



Observa el siguiente rectángulo que después hizo Yarima con las mismas figuras y responde.



a) ¿Cuántas unidades miden la base y la altura del rectángulo? Anótalo.

Base = __________ u

Altura = __________ u

b) Escribe el área del rectángulo.

$A =$ ____________ $u^2$

c) ¿Te sobra un cuadrito? ¿Por qué?

___________________________________________

___________________________________________

___________________________________________

___________________________________________

___________________________________________

___________________________________________

**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

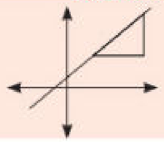
**Reúnete con un compañero para revisar las figuras. Fíjense en cuánto deben medir los lados y los ángulos para que el cuadrado y el rectángulo se armen correctamente.**

Les será muy útil hacer las cuatro figuras en cartulina y armar el rectángulo y el cuadrado. Cuanto más grandes sean, mejor.

## Pendiente de una recta I

PREGUNTA INICIAL

En la figura, ¿cuál es la relación entre la inclinación de la recta y el cociente de los catetos del triángulo?

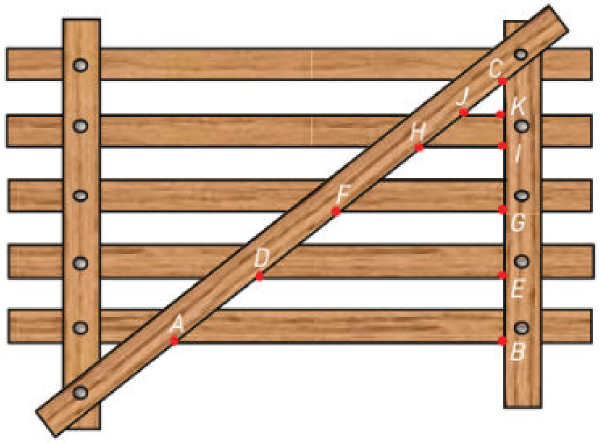


**1** **Analiza la siguiente situación y calcula la longitud de los segmentos de la cerca.**

En la siguiente cerca, las tablas horizontales son equidistantes y su separación mide el ancho de una tabla: $|\overline{AB}| = 6$ m y $|\overline{BC}| = 4.5$ m.

Calcula las distancias.

a) $|\overline{DE}| =$ ____
b) $|\overline{FG}| =$ ____
c) $|\overline{HI}| =$ ____
d) $|\overline{JK}| =$ ____
e) $|\overline{EC}| =$ ____
f) $|\overline{GC}| =$ ____
g) $|\overline{IC}| =$ ____
h) $|\overline{KC}| =$ ____




- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten las estrategias que emplearon para calcular las distancias.

i) Halla cuatro triángulos semejantes a $\triangle ABC$. Anótalos a continuación. ____________

j) Completa la tabla con los datos de los triángulos que anotaste en el inciso anterior.

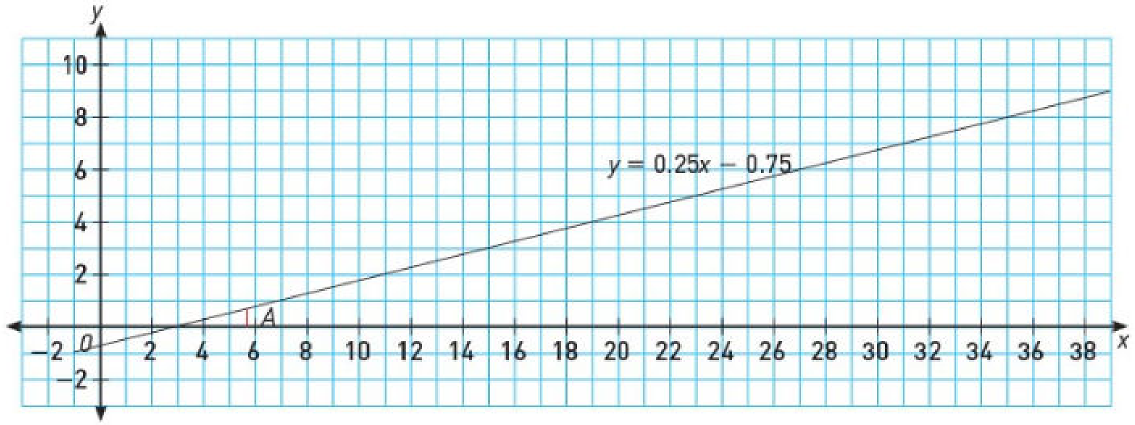
| Triángulo | *ABC* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Longitud del cateto mayor (cm) | 6 | | | | |
| Longitud del cateto menor (cm) | 4.5 | | | | |
| Cociente del cateto menor entre el cateto mayor | 0.75 | | | | |

k) Reúnete en equipo para comparar resultados. Verifiquen que en la última fila de la tabla siempre hayan obtenido 0.75. Si no es así, revisen sus procedimientos y sus cálculos.
l) Discute con tu equipo por qué los cocientes obtenidos son iguales. Anoten la explicación en el cuaderno. Después expongan sus conclusiones ante el grupo.





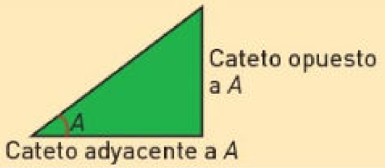
**2** **Construye cuatro triángulos rectángulos que tengan la hipotenusa sobre la recta. Intenta que sus vértices coincidan con las intersecciones de la cuadrícula para que determines con mayor precisión la medida de los catetos.**




a) Verifica que los triángulos que trazaste sean semejantes. Si no es así, revisa tus trazos. ¿Por qué son semejantes? ____________

b) Identifica el ángulo congruente con *A* en los triángulos que trazaste. Analiza la siguiente información y después identifica los catetos opuesto y adyacente de dichos ángulos.

El *cateto adyacente* de un ángulo es el que está a un lado de éste, y el *opuesto* es el que no forma parte de él.




c) Calcula los cocientes del cateto opuesto entre el cateto adyacente respecto a los ángulos que trazaste. Anótalos en tu cuaderno.
d) Trabajen en equipo para comparar los triángulos que trazaron y los cocientes que calcularon. Si los cocientes difieren, revisen sus triángulos y sus cálculos. Discutan por qué los cocientes deben ser iguales y anoten las conclusiones en su cuaderno.
e) Si el ángulo de la recta fuera distinto, ¿los cocientes cambiarían?, ¿por qué? Expongan ante el grupo sus conclusiones de este inciso y del anterior.

**3** **Para responder la pregunta inicial, en equipo y organizados por su profesor, tracen triángulos rectángulos en el pizarrón y calculen el cociente entre los catetos adyacente y opuesto de un ángulo que no sea el que mide 90°. Saquen conclusiones respecto a la inclinación de la hipotenusa de acuerdo con el resultado del cociente.**

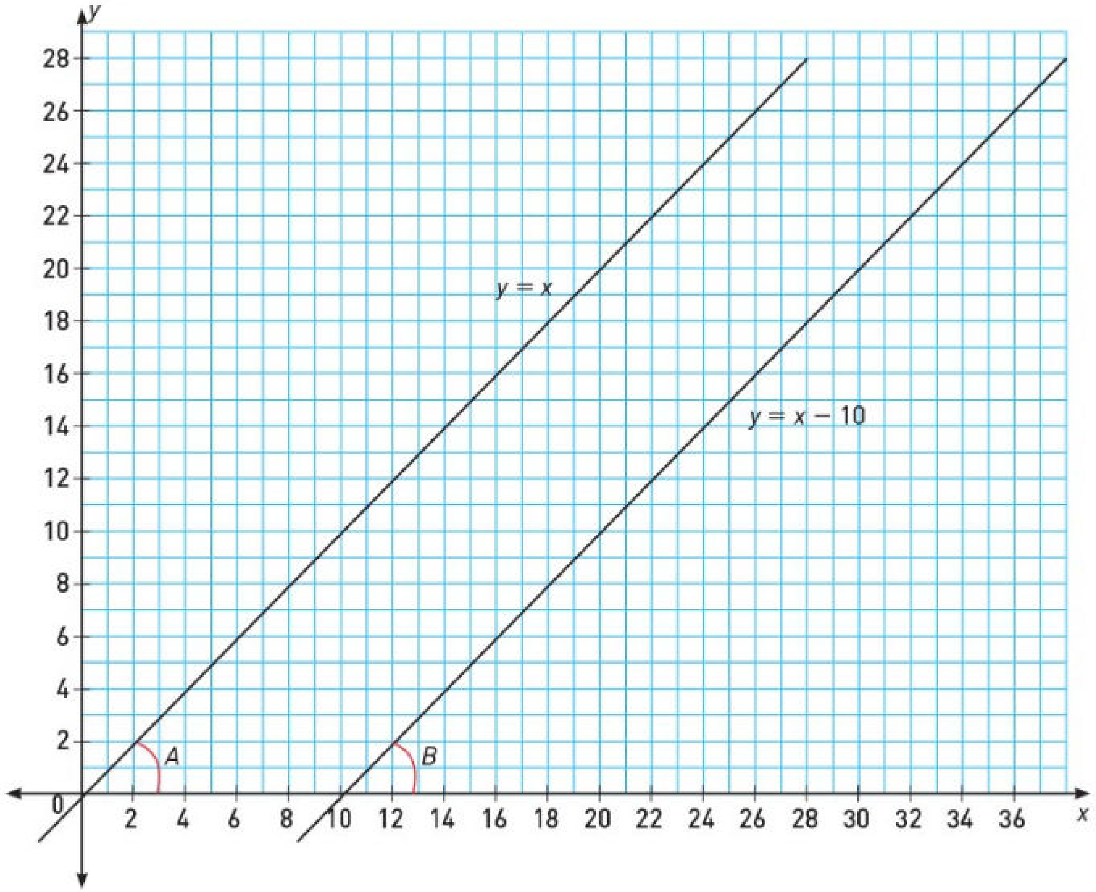
Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

## Pendiente de una recta II

**PREGUNTA INICIAL**

¿Cuál es la diferencia entre las gráficas de las rectas $y \cdot 2x + 3$ y $y \cdot 5x + 3$?

**1** Observa las rectas y efectúa lo que se pide.

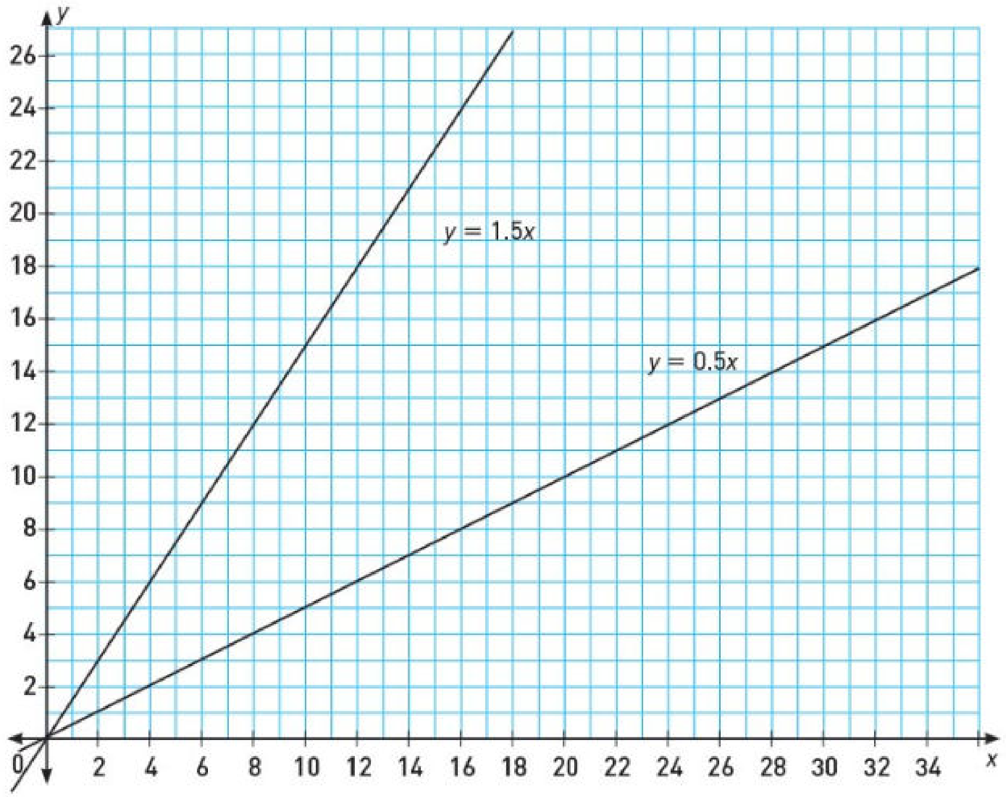



a) Comprueba que los ángulos $A$ y $B$ sean congruentes.
b) Traza, en cada caso, un triángulo rectángulo de manera que su hipotenusa quede sobre la recta. Identifica los ángulos congruentes con $A$ y $B$, respectivamente.
c) Calcula el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente en cada triángulo. Anota tus resultados en el cuaderno.
d) Reúnete en equipo para comparar sus cocientes. Comprueben que sean iguales aunque los triángulos trazados sean distintos.
e) Expliquen por qué los cocientes son iguales.
f) Tracen una recta paralela a las anteriores. Después tracen un triángulo rectángulo de manera que su hipotenusa quede sobre la recta y calculen el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente.
- Comparen sus resultados con los de otros equipos. Expliquen si sucedería lo mismo con otra recta paralela y por qué.





**2** Observa las rectas. Forma dos triángulos rectángulos para cada una, como en la actividad anterior.




a) Halla los cocientes del cateto opuesto entre el cateto adyacente, como en la actividad anterior. ¿Cuáles son iguales y cuáles son distintos? ____________
____________ ¿Por qué es así? ____________
____________

b) ¿Cuál es la relación entre los cocientes que calculaste y el coeficiente de $x$ en la ecuación de cada recta? ____________
____________

c) ¿Sucede lo mismo con las rectas de la actividad anterior? ______ ¿Y con la recta de la actividad 2 de la página 187? ____________

**3** Para responder la pregunta inicial, lee la siguiente información y calcula las pendientes de las rectas. Escribe tus resultados en tu cuaderno y compáralos con los del grupo.

En la ecuación de una recta expresada en la forma $y \cdot mx + b$, $m$ es la pendiente de la recta; es decir, la inclinación de ésta.

**TIC**

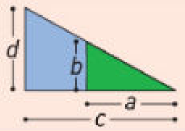
Ingresa al sitio <www.geogebratube.org/student/m2735>. Grafica distintos valores de $m$ y observa lo que sucede. Escribe tus conclusiones en el cuaderno y compáralas con el resto del grupo.

*Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.*

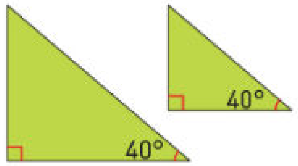
## Razones trigonométricas I

PREGUNTA INICIAL

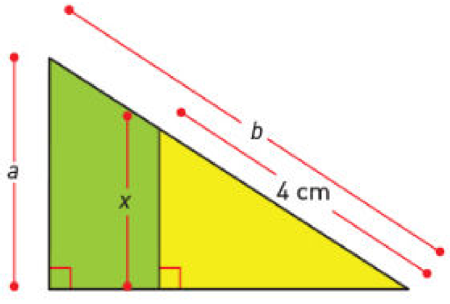
¿Cómo son entre sí los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$?




**1** Explica por qué los siguientes triángulos rectángulos son semejantes.

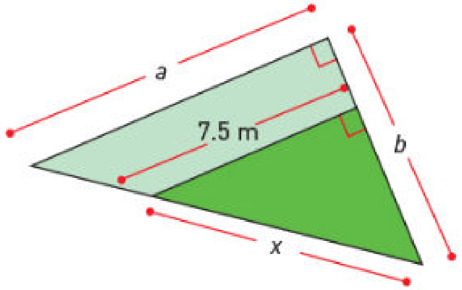



**2** Analiza los triángulos y calcula la medida de $x$.



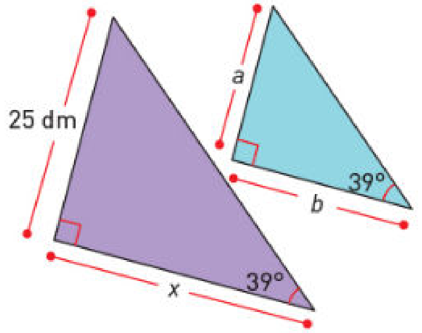

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

$x =$ ____________ cm



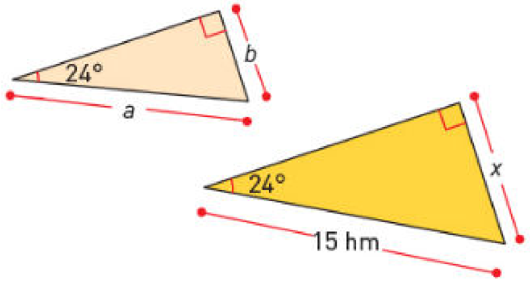

$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$

$x =$ ____________ m




$\frac{a}{b} = 0.8$

$x =$ ____________ dm




$\frac{a}{b} = 2.5$

$x =$ ____________ hm

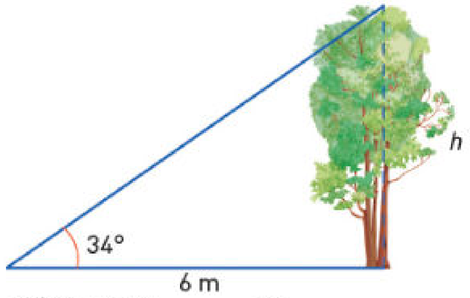
- Comenta con tus compañeros tus procedimientos de solución y, entre todos, expliquen por qué les fue útil conocer los cocientes dados en cada problema.



**3** Lee el problema y sigue el procedimiento que se señala para resolverlo.

a) ¿Cuál es la altura del árbol?

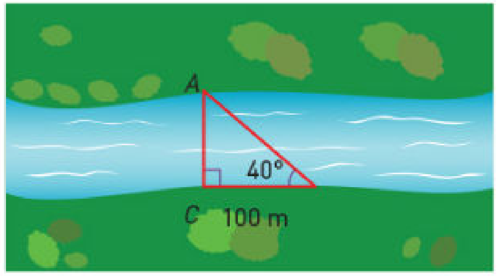
Traza un triángulo semejante al del problema y mide la longitud que necesitas. Después calcula la solución.




El árbol mide ________ m.

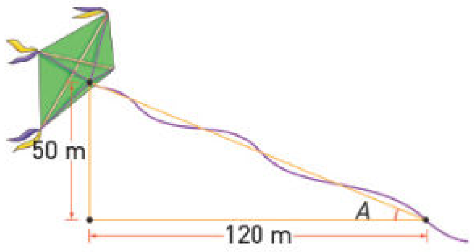
**4** Resuelve los problemas. Puedes dibujar triángulos semejantes.

a) ¿Cuánto mide el ancho del río?




El ancho del río mide: ________ m

b) ¿Cuál es la medida del ángulo $A$?




Mide: ____________

**Recuerda**

En las figuras semejantes, los ángulos correspondientes son iguales.

**5** Para responder la pregunta inicial, reproduce en tu cuaderno la figura de los dos triángulos, mide sus lados, calcula y compara los cocientes. Comenta con el grupo tus resultados y obtengan conclusiones.

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

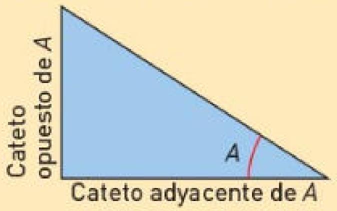
## Razones trigonométricas II

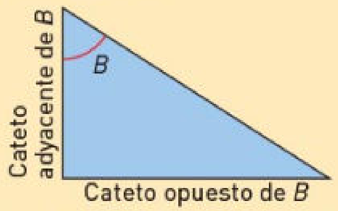
PREGUNTA INICIAL

¿Qué problemas se solucionarían al conocer el cociente de un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo?

**1** Analiza esta información con un compañero.

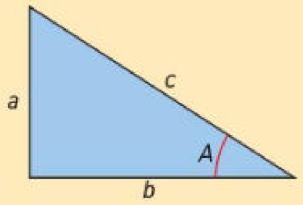
En un triángulo rectángulo, el *cateto adyacente* al ángulo agudo es el que forma el ángulo junto con la hipotenusa. El otro cateto es el *cateto opuesto*.




Si nos fijamos en el ángulo agudo de un triángulo rectángulo podemos definir las siguientes razones, llamadas *razones trigonométricas*.

- La razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa se llama *seno* del ángulo. El seno se denota sen.
- La razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa se llama *coseno* del ángulo y se denota cos.
- La razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente se llama *tangente* del ángulo y se denota tan.




$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo *A* de igual medida, son semejantes. Por lo tanto, las razones trigonométricas del ángulo *A* son iguales para cualquier triángulo rectángulo. La resolución de problemas, como los de la página 190, mediante figuras semejantes, puede resultar inexacta debido a errores de medición. Para evitar esto, se puede conocer la razón trigonométrica de cualquier ángulo con una calculadora científica. Revisa el siguiente ejemplo.

Fíjate que la calculadora esté en el modo *DEG*, que significa que trabajarás con grados.

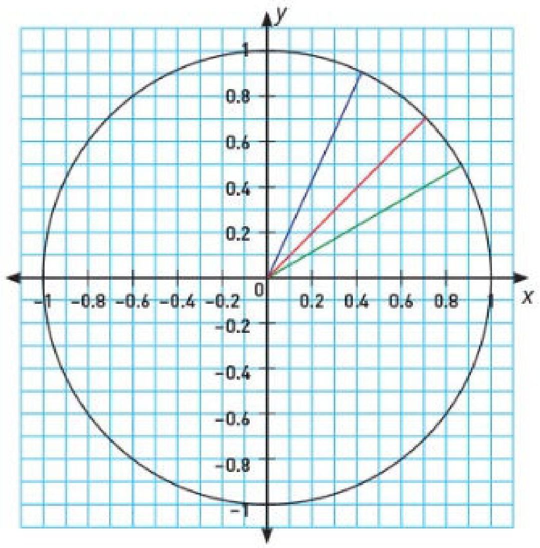
Para calcular el seno de 25°, introduce 25 en tu calculadora y presiona la tecla sin, en la pantalla aparecerá 0.42261826, que es el seno de 25° con bastante aproximación. Las funciones coseno y tangente se calculan con las teclas cos y tan,respectivamente.

El procedimiento con tu calculadora puede variar un poco. Investiga cómo funciona. Si no cuentas con una calculadora científica, usa una tabla trigonométrica, como la que se encuentra en el Anexo 1 de la página 250. En ella sólo podrás hallar las razones trigonométricas de ángulos enteros.



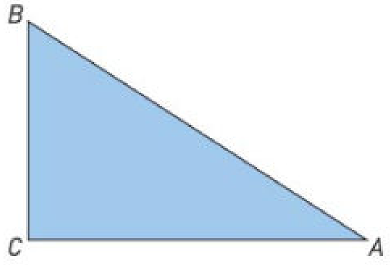


**2** Observa la figura, haz lo que se pide y contesta en tu cuaderno. Considera sólo ángulos positivos menores o iguales a 90°.




a) Observa que hay tres radios del círculo. Traza un segmento paralelo al eje *y* de manera que se formen tres triángulos rectángulos cuya hipotenusa sea un radio del círculo.
b) ¿Cuál es la medida del radio del círculo?
c) ¿Cuánto mide el ángulo que forma el radio rojo con el eje *x*? Llámalo ángulo *A*.
d) ¿Cuánto mide el ángulo que forma el radio verde con el eje *x*? Llámalo ángulo *B*.
e) ¿Cuánto mide el ángulo que forma el radio azul con el eje *x*? Llámalo ángulo *C*.
f) ¿Qué tipo de triángulo, de acuerdo con sus lados, es el que tiene el radio rojo como hipotenusa? ¿Por qué?
g) ¿Cuál es la tangente del ángulo *A*? ¿Por qué?
h) ¿La tangente del ángulo *B* es mayor o menor que la tangente de *A*? ¿Por qué?
i) ¿La tangente del ángulo *C* es mayor o menor que la tangente de *A*? ¿Por qué?
j) ¿Entre qué medidas, de 0° a 90°, se encuentra la medida de los ángulos que tienen una tangente menor que la de *A*?
k) ¿Entre qué medidas, de 0° a 90°, se encuentra la medida de los ángulos que tienen una tangente mayor que la de *A*?
l) Observa cómo son los triángulos rectángulos que se pueden formar en el círculo. ¿El seno de un ángulo puede ser mayor que 1? ¿Por qué?
m) ¿El coseno de un ángulo puede ser mayor que 1? ¿Por qué?

**3** Observa el triángulo y contesta en tu cuaderno.




a) ¿Qué relación hay entre el seno de *A* y el coseno de *B*? ¿Por qué?
b) ¿Lo anterior se cumple para cualquier triángulo rectángulo? ¿Por qué?

- Valida los resultados que obtuviste para seno, coseno y tangente en esta página comparándolos con los valores de la tabla del Anexo 1 de la página 250 de este libro.

**4** Comenten en grupo la respuesta de la pregunta inicial y planteen un problema que pueda resolverse al conocer el seno de un ángulo de 25°.

**TIC**

Ingresa al sitio <www.geogebratube.org/student/m1493>. Ahí encontrarás una aplicación con la que podrás observar el comportamiento de las razones trigonométricas en una circunferencia de radio 1.

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

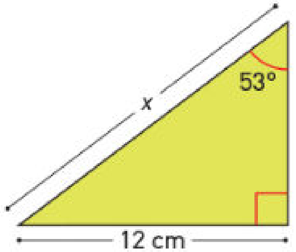
## Razones trigonométricas III

**PREGUNTA INICIAL**

Un hexágono regular mide 10 cm de apotema. ¿Cuánto mide de lado?

**1** Analiza los siguientes triángulos y responde lo que se indica.

a) ¿Cuál es la medida de $x$?




Considera que se conoce un ángulo y su cateto opuesto, y se desea conocer la medida de la hipotenusa.

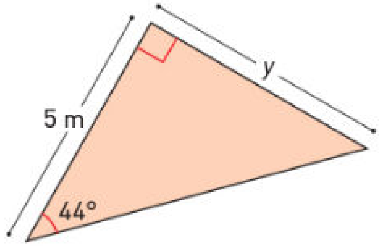
b) ¿Qué función trigonométrica relaciona el cateto opuesto y la hipotenusa? ___________

c) Usa la tabla de la página 250 o tu calculadora para encontrar el siguiente cociente. Es suficiente una aproximación de cuatro decimales.

$\frac{12}{x}$ = ___________

d) Calcula el valor de $x$: ___________ m

e) ¿Cuál es la medida de $y$? ___________




Ten en cuenta que se conoce un ángulo y su cateto adyacente, y se desea conocer la medida del cateto opuesto.

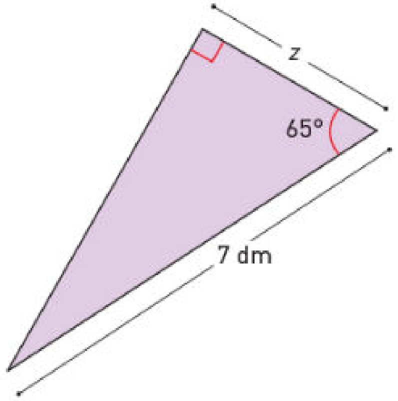
f) ¿Qué función trigonométrica relaciona el cateto opuesto y el cateto adyacente? ___________

___________

g) Halla el cociente $\frac{y}{5}$ = ___________

h) Calcula el valor de $y$: ___________ m

i) ¿Cuál es la medida de $z$?




Fíjate en que se conoce la hipotenusa y un ángulo, y se desea saber cuál es la medida del cateto adyacente del ángulo.

j) ¿Qué función trigonométrica relaciona el cateto adyacente y la hipotenusa? ___________

k) Encuentra la razón $\frac{z}{7}$ = ___________

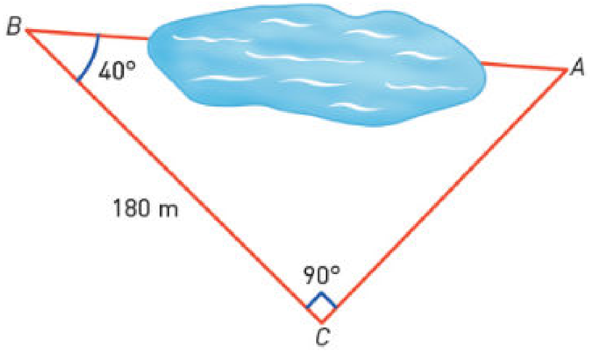
l) Calcula el valor de $z$: ___________ m

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y expliquen de qué manera les sirvió conocer las razones trigonométricas.



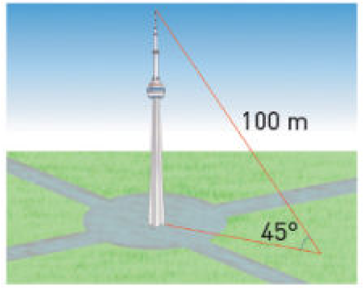
**2** Resuelve los problemas.

a) Calcula la distancia $\overline{AB}$.



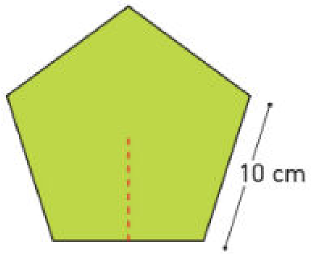

$|AB|$ = ______ m

b) Calcula la altura de la torre.



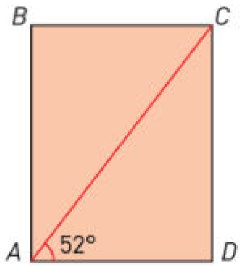

Altura = ___________ m

c) Encuentra la longitud de la apotema del pentágono regular.




Apotema = ________ cm

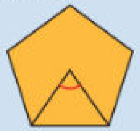
d) Calcula el perímetro del rectángulo $ABCD$. La diagonal mide 24 cm.




Perímetro = ________ cm

**Recuerda**

En segundo grado aprendiste a calcular la medida del ángulo central de un polígono regular.



**3** Para responder la pregunta inicial, formen equipos de cinco integrantes. Tracen en su cuaderno el hexágono con las medidas mencionadas y calculen la apotema. Después expongan sus resultados ante el grupo.

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

## Razones trigonométricas IV

**PREGUNTA INICIAL**

¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm?

**Observa**

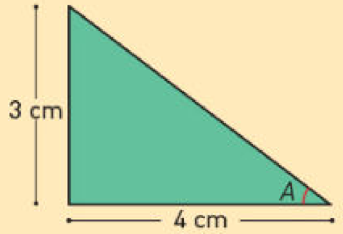
30.5° no son 30 grados y 5 minutos, sino 30 grados y 30 minutos. ¿Por qué?

En algunas calculadoras se puede obtener el valor en minutos y segundos. Investiga cómo.

Si se conoce una razón trigonométrica, puede usarse la calculadora científica para saber la medida de un ángulo. Por ejemplo:

Sabemos que tan $A = \frac{3}{5} = 0.75$

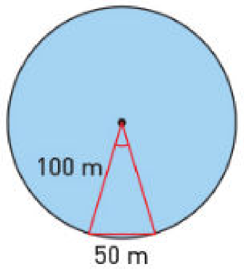
Tecleamos en la calculadora el número 0.75 y presionamos INV tg.
En algunas calculadoras, la combinación de teclas es SHIFT tg.
Y se obtiene 36.86989764. Entonces el ángulo $A$ mide 36°46'.




Para usar la tabla del Anexo 1 de la página 250, se busca el valor más cercano a 0.75 en la columna "Tangente", éste es 0.7536. Entonces encontramos que el ángulo mide aproximadamente 37°.

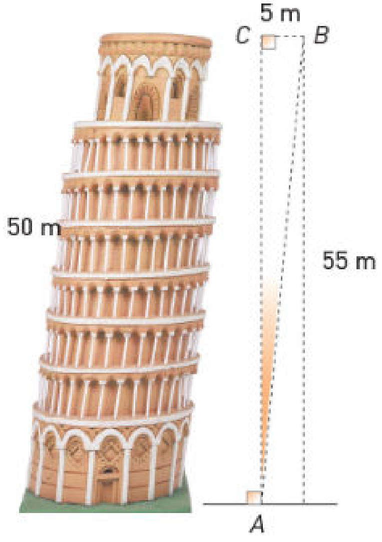
**1** Resuelve los problemas.

a) En una circunferencia de 100 m de radio se traza una cuerda que mide 50 m. ¿Cuánto mide el ángulo central que determinan los extremos de la cuerda?




El ángulo central mide ___________°

b) En la actualidad, la Torre de Pisa está separada de la vertical unos 5 m y su altura es de aproximadamente 55 m. Evalúa el ángulo que forma la torre con la vertical.

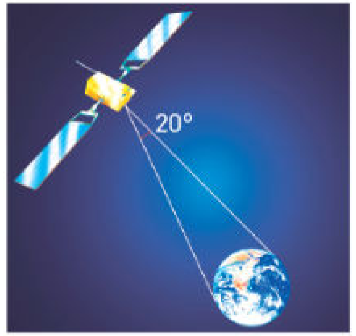



El ángulo que forma mide ________°



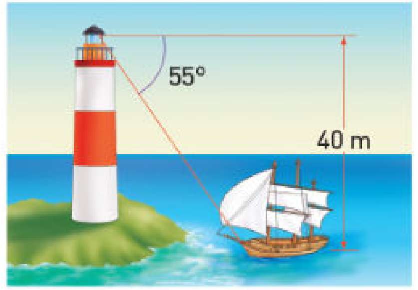


c) Desde una nave espacial se ve la Tierra a un ángulo de 20°. Si el radio de nuestro planeta es de 6370 km, ¿cuál es la distancia de la nave a la superficie terrestre?




La distancia es ____________ km

d) Desde un faro colocado a 40 m sobre el nivel del mar se ve un barco a un ángulo de depresión de 55°. ¿A qué distancia del pie del faro se encuentra el barco?



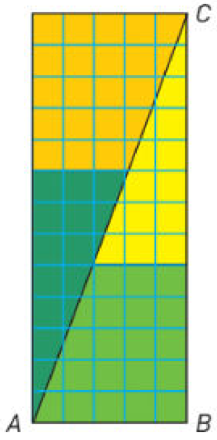

El barco se encuentra a __________ m del faro.

**Observa**

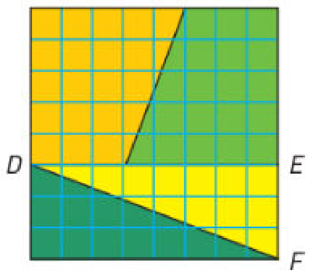
Si quieres saber más sobre la Tierra, los eclipses o por qué giran los planetas, lee el siguiente libro de la colección Libros del Rincón: VanCleave, Janice, *Astronomía para niños y jóvenes: 101 divertidos experimentos*, México, SEP-Limusa, 2002.

- Forma un equipo para comentar sus procedimientos de solución y, si es necesario, corrijan sus errores.

**2** Observa las figuras y contesta en tu cuaderno.




Considera que $|\overline{AB}| = 5$ y que $|\overline{BC}| = 13$, y calcula la medida del $\angle ABC$.




Considera que $|\overline{ED}| = 8$ y $|\overline{EF}| = 3$, y calcula la medida del $\angle EDF$.

- ¿Los triángulos amarillos son congruentes? ¿Por qué?

**3** Para responder la pregunta inicial, haz los cálculos necesarios y traza en tu cuaderno el triángulo con las medidas mencionadas. Comparte tus resultados con el grupo.

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

## Vida de cuadritos

Observa las sucesiones de figuras y haz lo que se indica.

Sucesión 1

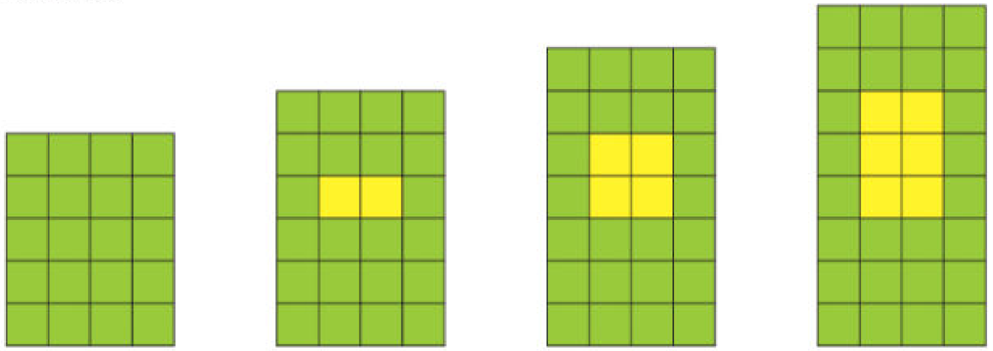


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Sucesión 2

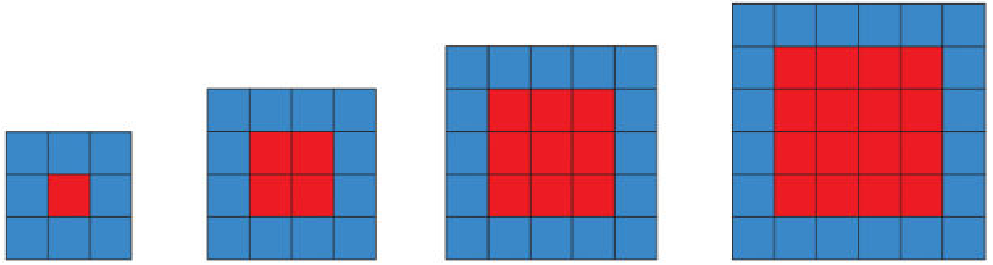


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Dibuja en tu cuaderno la quinta figura de cada sucesión.

b) Completa las tablas.

| | Sucesión 1 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4 | Figura 5 |
| Número de cuadrados amarillos | | | | | |
| Número de cuadrados verdes | | | | | |

| | Sucesión 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4 | Figura 5 |
| Número de cuadrados azules | | | | | |
| Número de cuadrados rojos | | | | | |



Observa que has obtenido cuatro sucesiones numéricas. Contesta las preguntas.

a) En la tabla, los números de la sucesión de cuadrados verdes son mayores que los de la sucesión de cuadrados azules. ¿Siempre será así? __________
¿Por qué? __________

b) ¿Cuál es la sucesión numérica cuyos números crecen más rápido? __________

c) ¿Qué sucesiones crecen a la misma velocidad? __________

d) ¿Cuáles de estas sucesiones tienen crecimiento constante? __________

**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

Trabaja con un compañero para encontrar otros términos de las sucesiones y grafiquen, con colores distintos, las cuatro sucesiones en un plano cartesiano. Tomen como abscisa el número de la figura y como ordenada el término de la sucesión numérica. Utilicen la siguiente cuadrícula.

## Razón de cambio I

**PREGUNTA INICIAL**

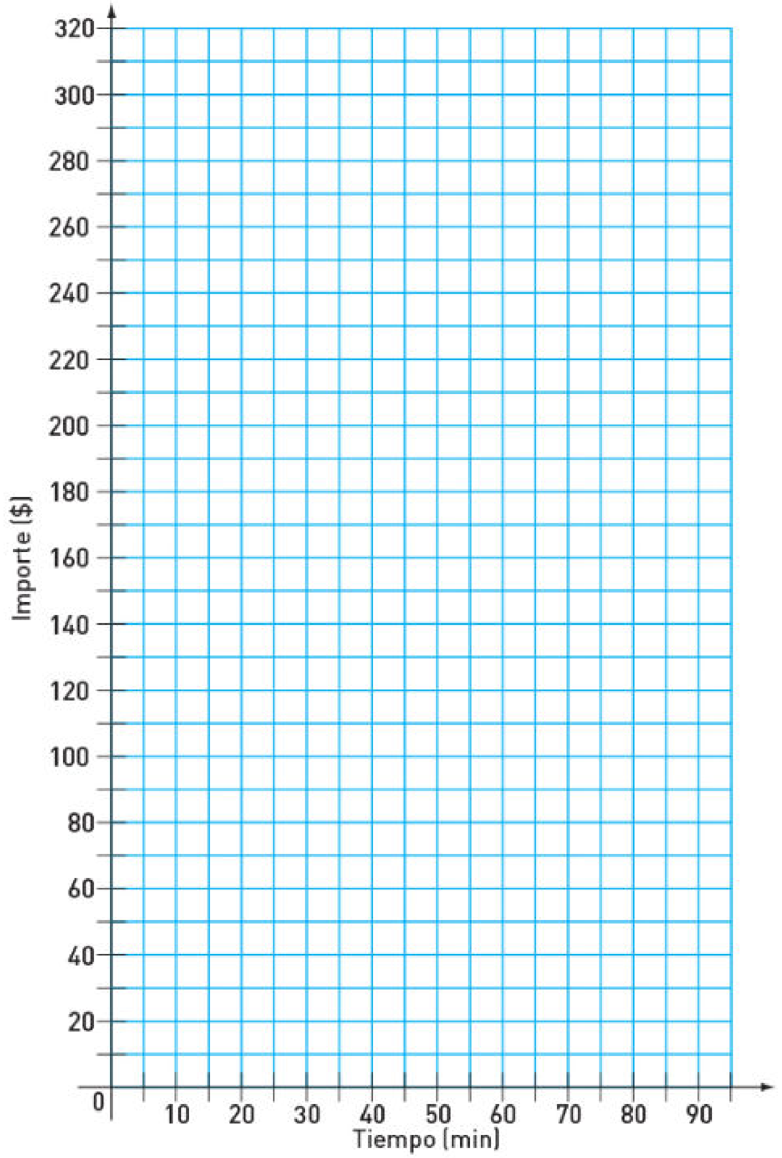
¿Por qué la gráfica que relaciona el lado de un cuadrado con su perímetro es una línea recta?

**1** **Trabaja con un compañero y resuelvan las siguientes actividades.**

Don Fernando alquila motocicletas y cobra por minuto. Revisa la tabla de costos.

| Tiempo (min) | 20 | 40 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|
| Importe ($) | $80.00 | $160.00 | $240.00 | $320.00 |

a) Represente con puntos los datos de la tabla anterior en el siguiente plano cartesiano.








b) ¿Cuánto varía el importe de 20 a 40 minutos? ______

c) ¿Cuánto varía el importe de 40 a 60 minutos? ______

d) ¿Cuánto varía el importe de 60 a 80 minutos? ______

e) ¿Cuánto cobra don Fernando por cada 20 minutos de alquiler? ______

f) Si Antonio alquiló una motocicleta por 30 minutos, ¿cuánto debe pagar? ______

g) Si Araceli tiene $150.00, ¿para cuántos minutos le alcanza? ______

h) ¿Cuánto cobra don Fernando por cada minuto de alquiler? ______

¿Cómo lo calcularon? ______

i) Une con segmentos los puntos que graficaste. Verifica que los puntos se encuentren sobre la misma línea recta. Si no es así, revisa que hayas hecho bien tus cálculos y que hayas ubicado correctamente todos los puntos.

**2** **Analicen la siguiente situación y respondan las preguntas.**

Don Luis también alquila motocicletas. La siguiente es su tabla de precios.

| Tiempo (min) | 20 | 40 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|
| Importe ($) | $140.00 | $170.00 | $200.00 | $230.00 |

a) Representa en el plano cartesiano de la página anterior los puntos de la tabla de don Luis. Une los puntos con una línea recta.

b) ¿Cuánto varía el importe de 20 a 40 minutos? ______

c) ¿Cuánto varía el importe de 40 a 60 minutos? ______

d) ¿Cuánto varía el importe de 60 a 80 minutos? ______

e) Alma alquiló una motocicleta. Cuando fue a pagarla notó que su dinero le alcanzaba para 20 minutos más. ¿Cuánto dinero tenía de sobra? ______

f) Rosa alquiló a don Luis una motocicleta por 30 minutos. ¿Cuánto debe pagar? ______

g) Don Luis hace un cobro inicial y una cuota fija por minuto. ¿Cuánto cuesta cada minuto de alquiler? ______

h) ¿De cuánto es el cobro inicial? ______

- Comparen sus respuestas de esta actividad con las de otras parejas y justifíquenlas ante el grupo. Expliquen por qué las gráficas son líneas rectas.

**3** **Para responder la pregunta inicial, organizados por su profesor, hagan una lluvia de ideas en la que sugieran la respuesta. En grupo elaboren sus conclusiones.**

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

## Razón de cambio II

**PREGUNTA INICIAL**

¿Qué se obtiene al dividir el perímetro de un cuadrado entre la longitud de su lado? ¿Por qué?

**1** Recuerda la situación de la lección anterior, en la que don Fernando rentaba motocicletas. Él cobraba de acuerdo con la siguiente tabla.

$A_1$ + $A_2$ + $A_3$ +

| Tiempo (min) | 20 | 40 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|
| Importe ($) | $80.00 | $160.00 | $240.00 | $320.00 |

+ $B_1$ + $B_2$ + $B_3$

a) Escribe en los óvalos las cantidades que se suman para pasar de un valor a otro. ¿Cómo calcularías estas cantidades? ____________

b) ¿Qué cantidades sumaste en la parte superior de la tabla? ____________

c) ¿Qué cantidades sumaste en la parte inferior de la tabla? ____________

d) Resuelve estas divisiones.

$\frac{B_1}{A_1} =$ $\frac{B_2}{A_2} =$ $\frac{B_3}{A_3} =$

e) ¿Qué relación percibes entre los cocientes anteriores y lo que don Fernando cobra por minuto? ____________

Cuando calculas lo que se debe sumar para pasar de un valor a otro de la tabla, encuentras el *incremento del valor*.

En el ejemplo anterior, la razón entre los incrementos de la tabla es constante. Se dice entonces que la *razón de cambio* entre los valores es constante.

**2** Analiza la situación y haz lo que se pide.

A medida que asciende un globo aerostático, la temperatura disminuye. Al iniciarse la ascensión, el termómetro marca 16°C. Analiza la siguiente tabla.

| Altura (m) | 0 | 50 | 200 | 500 | 800 |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (°C) | 16 | 15.25 | 15 | 13.5 | 12 |

**Recuerda**
El símbolo °C significa grados Celsius.

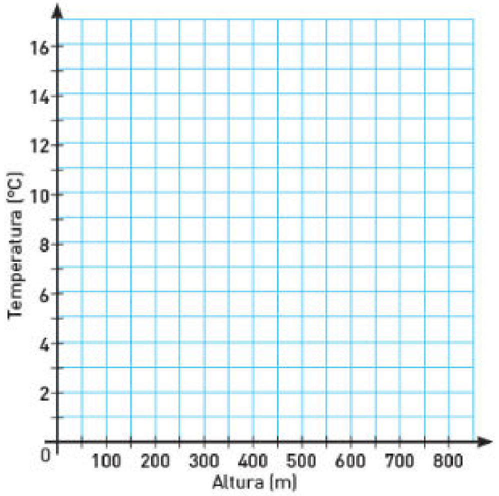




a) Representa los puntos de la tabla en el plano cartesiano.

b) Une los puntos que graficaste con una línea recta.

c) Anota en los óvalos los incrementos de los valores de la tabla. Recuerda que puedes sumar números negativos.




$A_1$ + $A_2$ + $A_3$ + $A_4$ +

| Altura (m) | 0 | 50 | 200 | 500 | 800 |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (°C) | 16 | 15.75 | 15 | 13.5 | 12 |

+ $B_1$ + $B_2$ + $B_3$ + $B_4$

d) Resuelve los cocientes. Ten en cuenta los signos.

$\frac{B_1}{A_1} =$ $\frac{B_2}{A_2} =$ $\frac{B_3}{A_3} =$ $\frac{B_4}{A_4} =$

e) ¿Qué observas en los incrementos? ____________

f) ¿Cuál es el descenso de temperatura por cada 100 m? ____________

**3** Formen equipos de cuatro integrantes para resolver esta actividad. Revisen las sucesiones de cuadritos de la página 198 y determinen en cuáles la razón de cambio es constante. Anoten en su cuaderno cómo es la gráfica de dichas sucesiones.

**4** Lean la siguiente información, relaciónenla con las situaciones anteriores y expongan ante el grupo un ejemplo de dos magnitudes relacionadas con una razón de cambio constante.

Cuando la razón de cambio entre dos magnitudes relacionadas es *constante*, los puntos que la representan en el plano cartesiano se encuentran sobre una línea recta.

**5** Reúnanse en equipo para responder la pregunta inicial de esta lección. Tracen un cuadrado con las medidas que quieran, calculen lo necesario y obtengan la respuesta. Hagan lo mismo con el área del cuadrado y obtengan sus conclusiones.

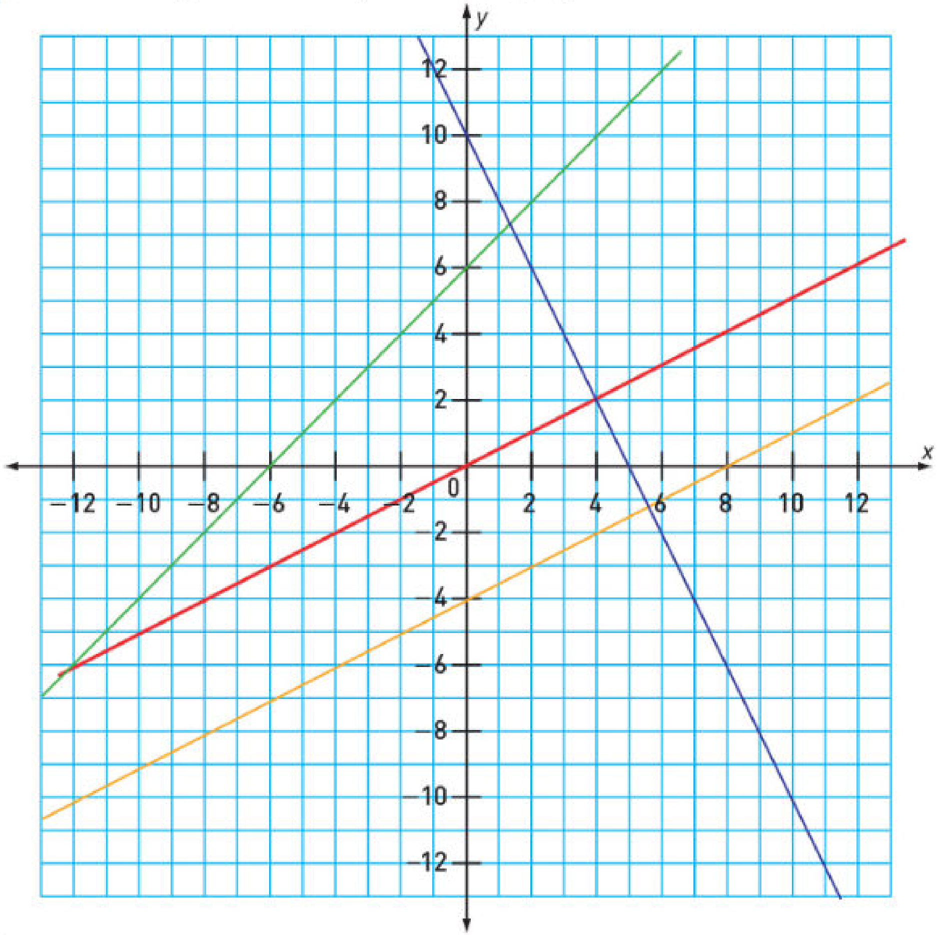
Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

## Razón de cambio III

PREGUNTA INICIAL

¿Cómo se calcula la razón de cambio de una recta?

**1** Observa las siguientes rectas y contesta las preguntas.




a) Escoge dos puntos de cada recta y anótalos en las tablas.

Recta roja

| Punto 1 | | Punto 2 | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ |
| | | | |

Recta azul

| Punto 1 | | Punto 2 | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ |
| | | | |

Recta verde

| Punto 1 | | Punto 2 | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ |
| | | | |

Recta amarilla

| Punto 1 | | Punto 2 | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ |
| | | | |





b) Calcula los cocientes.

| Recta roja | Recta azul | Recta verde | Recta anaranjada |
|---|---|---|---|
| $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$ | $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$ | $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$ | $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$ |

c) ¿Qué relación observas entre los cocientes y los signos de los puntos? __________

d) ¿Qué cocientes son positivos? __________

e) ¿Cuáles son negativos? __________

- Compara los cocientes que encontraste con los de tus compañeros.

**2** Observa las rectas de la actividad 1 y contesta.

a) ¿En qué rectas aumenta el valor de la coordenada del eje *x* cuando el valor de la coordenada del eje *y* también aumenta? __________

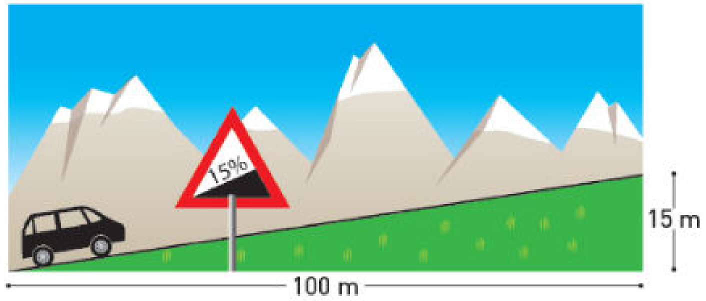
b) ¿Cómo es el signo de la pendiente de estas rectas? __________

c) ¿En qué rectas disminuye el valor de la coordenada del eje *y* cuando el valor de la coordenada del eje *x* también disminuye? __________

d) ¿Cómo es el signo de la pendiente de estas rectas? __________

- Comenta con el grupo tus respuestas y justifícalas.

**3** Observa la imagen y contesta.




a) ¿Cuál es la pendiente de la recta sobre la que se ubica la carretera por la que asciende el automóvil? __________

b) ¿Cuál es el significado de la señal de tránsito? __________

**4** Trabaja con un compañero para responder la pregunta inicial. Tracen una recta inclinada en el plano, tabulen al menos diez pares de coordenadas y calculen las respectivas razones de cambio entre ellas. Lean la siguiente información y obtengan conclusiones.

Observa que los cocientes que calculaste son la razón de cambio de las rectas. La razón de cambio de una recta es su pendiente.

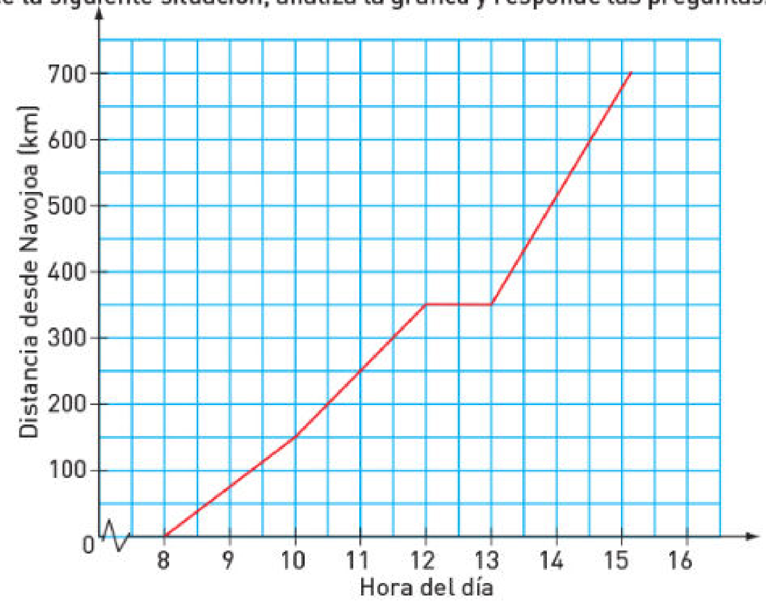
Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

## Razón de cambio IV

PREGUNTA INICIAL

Si una recta tiene pendiente 4 y otra 8, ¿cuál forma un ángulo mayor con el eje *x*?

**1** Lee la siguiente situación, analiza la gráfica y responde las preguntas.




La gráfica corresponde a un viaje en automóvil desde Navojoa, Sonora, hasta Agua Prieta, en el mismo estado.

a) ¿A qué hora salió el automóvil de Navojoa? ______

b) ¿Qué velocidad llevaba al inicio del viaje? ______

c) ¿A qué hora el automóvil cambió de velocidad? ______ ¿Aumentó o disminuyó la velocidad? ______

d) ¿A qué hora hizo una parada y cuánto duró? ______

e) Sin tener en cuenta la parada, ¿entre qué horas el automóvil tuvo la menor velocidad? ______

f) ¿Entre qué horas el automóvil se desplazó a la mayor velocidad durante el viaje? ______

g) Fíjate en que la gráfica está formada por cuatro segmentos de recta con distintas inclinaciones. Escribe las pendientes de cada una.

Pendiente 1 = ______ Pendiente 2 = ______

Pendiente 3 = ______ Pendiente 4 = ______

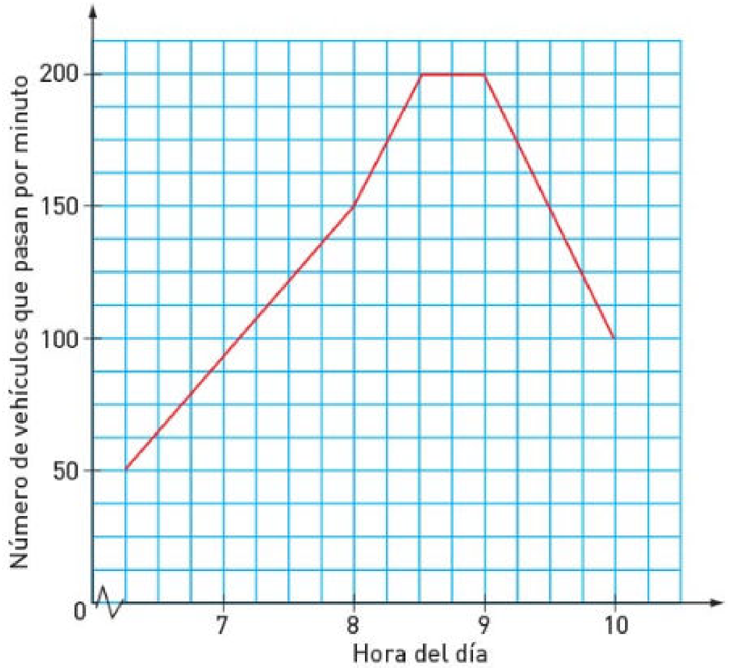
h) ¿Qué relación hay entre las pendientes que calculaste y la velocidad del automóvil? ______





**2** La gráfica muestra el número de vehículos que pasan por las casetas de cobro ubicadas en cierto punto de una carretera.

a) Describe la situación en tu cuaderno.




b) Observa que la gráfica está formada por cuatro segmentos de recta con distintas inclinaciones. Escribe la pendiente de cada una.

Pendiente 1 = ______ Pendiente 2 = ______

Pendiente 3 = ______ Pendiente 4 = ______

c) ¿Qué relación hay entre las pendientes que calculaste y los vehículos que pasan por minuto? ______

d) ¿Qué indican las pendientes negativas? ______

- Comenta con el grupo tus resultados y justifica tus respuestas.

**3** Trabajen en equipo para que lean la siguiente información y expongan ejemplos de rectas con pendiente positiva, negativa y cero.

La pendiente está relacionada con la inclinación de la recta respecto al eje *x*.

Una *pendiente positiva* indica que la recta es *creciente*; es decir, cuando los valores de las abscisas aumentan, los valores correspondientes de las ordenadas también aumentan.

Una *pendiente igual a cero* indica que la recta es *paralela* al eje *x*.

Una *pendiente negativa* indica que la recta es *decreciente*; es decir, que cuando los valores de las abscisas aumentan, los correspondientes de las ordenadas disminuyen.

**4** Para responder la pregunta inicial, en un plano traza las dos rectas indicadas y calcula o mide sus ángulos. Comenta tus conclusiones con tus compañeros.

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

## Medidas de dispersión I

PREGUNTA INICIAL

¿En qué casos la media aritmética, o promedio, representa bien un conjunto de datos?

**1** Lee la siguiente situación y responde.

Juan y Antonio, además de ser amigos, son de estatura muy parecida: Juan mide 1.75 m y Antonio, 1.73 m. En cambio, Luis y Fernando, también amigos, difieren mucho en estatura: Luis mide 1.85 m y Fernando, 1.59 m.

a) ¿Cuál es el promedio de las estaturas de Juan y Antonio? ____

b) ¿Cuál es el promedio de las estaturas de Luis y Fernando? ____

c) ¿En qué caso el promedio es más representativo de las estaturas? ____ Explica tu respuesta en tu cuaderno.

**2** Analiza la tabla de calificaciones y contesta las preguntas.

Las calificaciones de tres alumnos en cinco bimestres de Matemáticas son las siguientes. Calcula los promedios.

| | Calificaciones | | | | | Promedio |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Karina | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 | |
| Teresa | 9 | 6 | 6 | 10 | 10 | |
| Carlos | 9 | 7 | 6 | 6 | 6 | |

a) ¿Qué alumno fue el más constante en sus calificaciones? ____

b) ¿En qué caso el promedio es más representativo? ____

¿Por qué? ____

c) ¿En qué caso el promedio es menos representativo? ____

¿Por qué? ____

**3** Lee la siguiente tabla de goleo y contesta lo que se pide.

En la tabla anota el promedio de los goles que anotaron tres jugadores en 10 partidos.

| | Goles | | | | | | | | | | Promedio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Javier | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | |
| Antonio | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| Fermín | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | |

a) ¿Qué jugador fue el más constante en cuanto al número de goles en cada partido?

____





b) ¿En qué caso el promedio o la media es más representativo? ____

¿Por qué? ____

c) ¿En qué caso el promedio es menos representativo? ____

¿Por qué? ____

- Reúnete en equipo para comparar respuestas. Discutan en qué casos el promedio es representativo de un conjunto de datos. Anoten sus conclusiones enseguida.

____

____

**4** Reúnete en equipo con algunos compañeros para analizar la información y contestar.

Las *medidas de dispersión* son cantidades que muestran la forma en que varían los datos de un conjunto de números en relación con la desviación media o promedio. Dentro de estas medidas se encuentra el rango, que es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de todos los datos analizados.

a) Calculen el rango de cada conjunto de datos de la actividad anterior. Anótenlos en su cuaderno.

b) ¿El rango puede ser útil para saber si el promedio de un conjunto de datos es representativo de éste? ____ ¿Por qué? ____

____

- Comenten sus respuestas con los otros equipos y obtengan una conclusión.

**5** Trabaja en equipo para calcular los promedios y los rangos. Contesten en su cuaderno.

En la tabla se registran las edades de los 10 integrantes de dos equipos de basquetbol.

| | Edades (años) | | | | | | | | | | Promedio | Rango |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Equipo 1 | 17 | 18 | 20 | 19 | 18 | 20 | 17 | 18 | 45 | 19 | | |
| Equipo 2 | 30 | 18 | 36 | 32 | 17 | 39 | 17 | 35 | 35 | 34 | | |

a) ¿En qué caso el promedio es más representativo?
b) En este caso, ¿el rango es útil para determinar si el promedio es representativo? ¿Por qué?
c) Discutan con el grupo sus respuestas y obtengan conclusiones.

**6** Lee la siguiente información con el grupo. Expliquen qué significa que un grupo de datos esté muy disperso.

Se dice que un conjunto de datos es *disperso* si el rango es muy grande. Sin embargo, el rango tiene la desventaja de sólo considerar los valores extremos y no permitir un análisis de todos los números en cuestión.

**7** Respondan la pregunta inicial en equipos. Consideren el concepto *datos dispersos* y su relación con la media de un grupo de datos. Comenten sus conclusiones.

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

# Lección 74





## Medidas de dispersión II

PREGUNTA INICIAL

Si se conocen los promedios de dos conjuntos de datos, ¿cómo se determina cuál es el conjunto más disperso?

**1** **Calcula el promedio y el rango de las siguientes calificaciones; después responde.**

Las calificaciones de tres alumnos en cinco exámenes fueron las siguientes.

| | Calificaciones | | | | | Promedio | Rango |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alicia | 10 | 8 | 7 | 9 | 6 | | |
| Tania | 10 | 10 | 8 | 6 | 6 | | |
| Raúl | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | | |

a) De acuerdo con el rango, ¿en qué conjunto están menos dispersos los datos? ________________

b) ¿El rango te sirve para saber en qué conjunto están más dispersos los datos? ________ ¿Por qué? ________________

c) ¿Cómo se sabe en qué conjunto están más dispersos los datos? ________________

d) Si se calcula la diferencia entre cada calificación de Raúl y el promedio, ¿qué se obtiene? ________________ ¿Esto indica qué tan dispersos están los datos? ________ ¿Por qué? ________________

**2** **Calcula el promedio y el rango de los siguientes datos y responde las preguntas.**

En una fábrica hay dos máquinas (*A* y *B*) para envasar jugos. Se midió el contenido de 10 envases producidos en cada una y se obtuvieron estos resultados.

| | Contenido (litros) | | | | | | | | | | Promedio | Rango |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 1.3 | 1.1 | 0.99 | 1.18 | 0.85 | 0.81 | 0.8 | 1.05 | 0.88 | 1.04 | | |
| *B* | 1 | 0.95 | 1.05 | 0.7 | 0.99 | 0.99 | 1.03 | 1.04 | 1.2 | 1.05 | | |

a) ¿El rango sirve para saber qué datos están más dispersos? __________ ¿Por qué? ________________

b) ¿En qué conjunto los datos están menos dispersos? ________________ ¿Por qué? ________________

c) ¿En qué conjunto los datos se alejan más del promedio? ________________

- Comenta tus respuestas con tus compañeros y discutan maneras de saber la dispersión de un conjunto de datos.



**3** **Haz lo que se pide con base en la situación de la actividad 1 de esta lección.**

a) Calcula el valor absoluto de la diferencia entre cada dato y el promedio.
b) Calcula el promedio de los valores que obtuviste en el inciso anterior. Anota tus resultados enseguida.

Alicia: ________ Tania: ________ Raúl: ________

c) ¿Los valores que obtuviste en el inciso anterior sirven para determinar qué conjunto de datos está más disperso? ________ ¿Por qué? ________________

TIC

Ingresa al sitio <recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena11/3quincena11_contenidos_4a.htm> y resuelve algunas de las actividades.

**4** **Contesta los incisos a) y b) de la actividad 3 aplicados a la situación de la actividad 2. Anota tus resultados enseguida.**

Máquina *A*: ________ Máquina *B*: ________

d) ¿Los valores que obtuviste sirven para determinar qué conjunto de datos está más disperso? ¿Por qué? ________________

- Compara tus respuestas con las del resto del grupo.

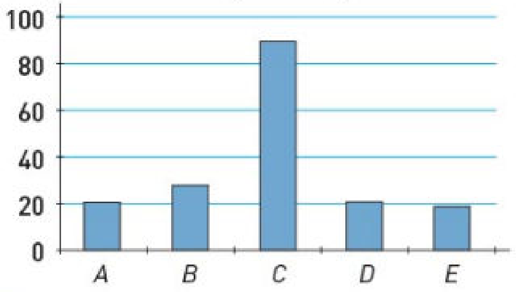
**5** **Analiza la siguiente información y contesta en tu cuaderno.**

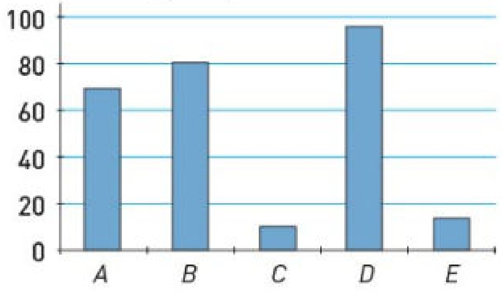
Dentro de las medidas de dispersión también se encuentran la *desviación de un dato con respecto a la media*, que es la diferencia entre cada valor y el promedio de todos los datos, y la *desviación media del conjunto de datos*, que es el promedio de los valores absolutos de las desviaciones de todos los números.

a) ¿En qué casos de la actividad anterior se calcularon las desviaciones medias?
b) ¿Cuál es la relación entre la desviación media y la dispersión de un conjunto de datos?

**6** **Elabora en tu cuaderno las gráficas de barras correspondientes a las situaciones planteadas en las actividades 1 y 2 de esta lección. Después contesta lo siguiente.**

a) ¿Cómo es la gráfica de un conjunto de datos cuya desviación media es 0?
b) ¿En cuál de las siguientes gráficas la desviación media es menor? ¿Por qué?



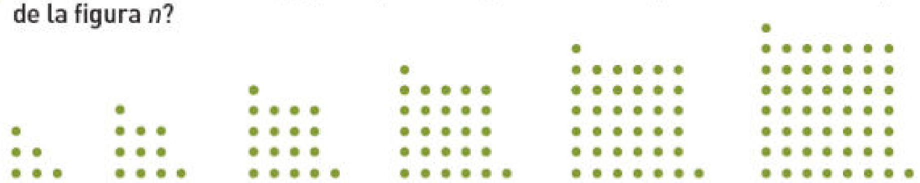




**7** **Respondan la pregunta inicial en equipo y expongan sus conclusiones ante el grupo.**

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

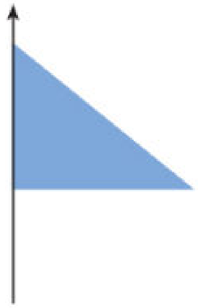
Analiza las siguientes preguntas y subraya la respuesta correcta.

**1** En la sucesión mostrada, ¿qué expresión algebraica corresponde al número de puntos de la figura $n$?



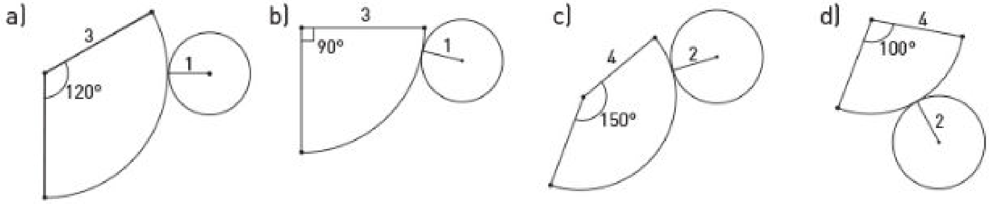
a) $n^2 + 2$ b) $(n + 1)^2 + 2$ c) $(n + 2)^2$ d) $n^2 + 2n$

**2** Arturo construyó una veleta de lámina con forma de triángulo rectángulo, como se muestra en la imagen. ¿Qué cuerpo formará la lámina al girar alrededor del soporte?

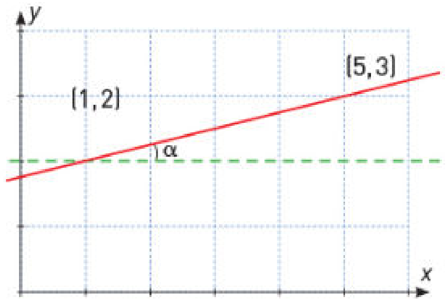


a) Pirámide triangular. b) Cono.
c) Cilindro. d) Prisma triangular.

**3** ¿Con cuál de los siguientes desarrollos planos se puede formar un cono recto?

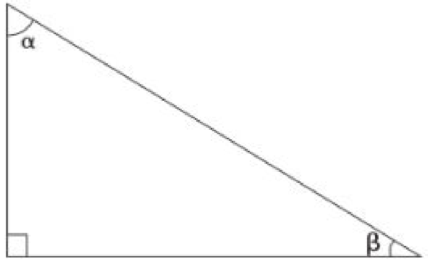



**4** En la imagen, ¿cuánto mide el ángulo $\alpha$? Considera que la recta punteada es perpendicular al eje $y$.




a) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ b) $\alpha = \tan\left(\frac{1}{4}\right)$
c) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{1}\right)$ d) $\alpha = \tan\left(\frac{4}{1}\right)$

**5** Si $\alpha$ y $\beta$ son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, ¿qué igualdad es verdadera siempre, es decir, sin importar cuánto miden los ángulos $\alpha$ y $\beta$?

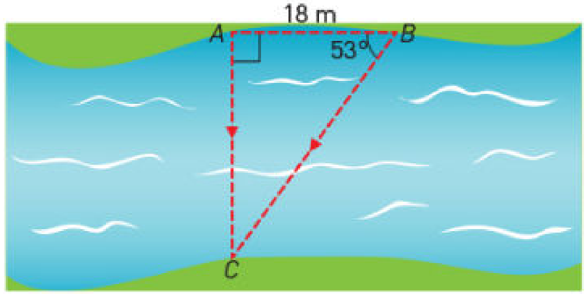



a) $\operatorname{sen} \alpha = \tan \beta$ b) $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$
c) $\tan \alpha = \cos \beta$ d) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$



**6** Desde dos puntos en la orilla de un río ($A$ y $B$) se ve una piedra en la otra orilla ($C$). Si el segmento $\overline{AB}$ mide 18 m y forma ángulos de 90° y de 53° con las líneas de visión, ¿cuánto mide el ancho del río?

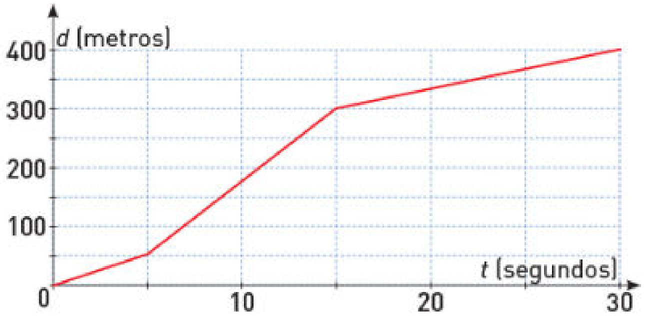
a) $|\overline{AC}| = 18(\operatorname{sen} 53°)$
b) $|\overline{AC}| = \frac{18}{\operatorname{sen} 53°}$
c) $|\overline{AC}| = 18(\tan 53°)$
d) $|\overline{AC}| = \frac{18}{\tan 53°}$




**7** Si una recta pasa por los puntos (1, 1) y (2, −4), ¿cuál es su razón de cambio (pendiente)?

a) $\frac{\text{cambio en } x}{\text{cambio en } y} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ b) $\frac{\text{cambio en } x}{\text{cambio en } y} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$
c) $\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{5}{1} = 5$ d) $\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{-5}{1} = -5$

**8** La gráfica muestra la relación entre la distancia recorrida por un ciclista ($d$) y el tiempo transcurrido en el recorrido ($t$). ¿Cuál fue la velocidad máxima durante el trayecto?




a) 400 m/s b) 250 m/s
c) 25 m/s d) 10 m/s

**9** Los siguientes números corresponden a las edades de un grupo de alumnos de segundo grado de secundaria: 13, 13, 14, 15, 13, 14, 15, 14, 14, 14, 15, 14. ¿Cuántos alumnos se alejaron más del promedio y cuál fue la desviación de cada uno?

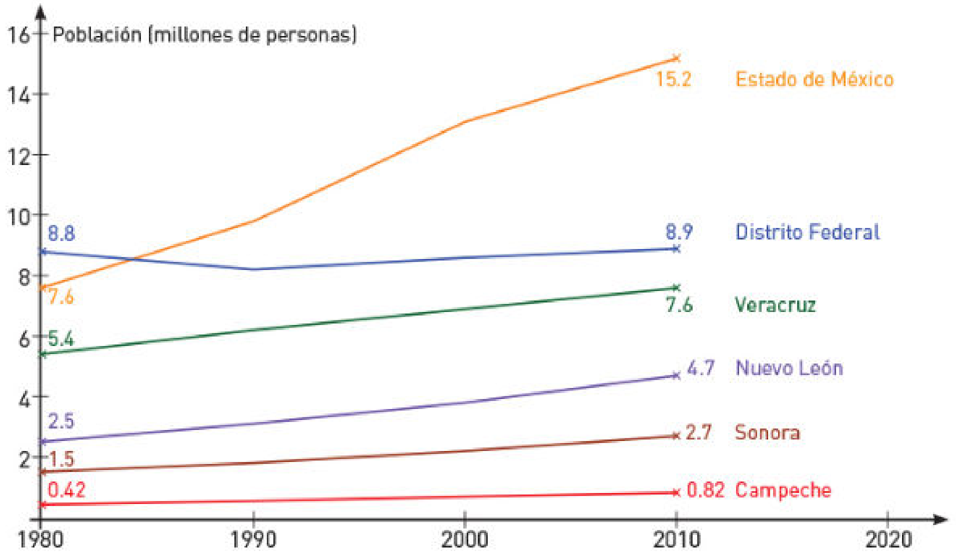
a) Seis alumnos, con una desviación de 2.
b) Seis alumnos, con una desviación de 1.
c) Tres alumnos, con una desviación de 2.
d) Tres alumnos, con una desviación de 1.

**10** ¿Qué puede afirmarse de dos conjuntos de datos con el mismo rango pero distinta desviación media?

a) Los valores máximo y mínimo de ambos conjuntos coinciden, pero los conjuntos tienen distinta cantidad de elementos.
b) Los valores máximo y mínimo de ambos conjuntos coinciden, pero las distancias de los datos al promedio son diferentes.
c) Ambos conjuntos tienen la misma distancia entre el valor máximo y el mínimo, pero tienen distinta cantidad de elementos.
d) Ambos conjuntos tienen la misma distancia entre el valor máximo y el mínimo, pero las distancias de los datos al promedio son distintas.

**Lee la información y responde lo que se pide.**

La gráfica muestra la cantidad de habitantes en algunas entidades del país durante las últimas décadas.




Elaboración propia con datos de goo.gl/XB8zA2 (Consulta: 9 de octubre de 2014).

**Pregunta 1.** Los datos del Distrito Federal tienen una característica que los distingue de los demás. Escribe cuál es y explica al menos una posible causa. ______________________

______________________________________________

**Pregunta 2.** ¿Qué significa que las gráficas de Veracruz y Campeche no cambien de inclinación? ______________________

**Pregunta 3.** Divide, para cada entidad, el rango de población entre la cantidad de años transcurridos durante el periodo.

Estado de México: __________ Distrito Federal: __________

Veracruz: __________ Nuevo León: __________

Sonora: __________ Campeche: __________

Explica qué significan los resultados anteriores: ______________________

______________________________________________

**Pregunta 4.** Explica brevemente cómo estimarías la población del Distrito Federal y de Veracruz en 2020. ______________________

______________________________________________

______________________________________________





## TIC. Un programa de geometría

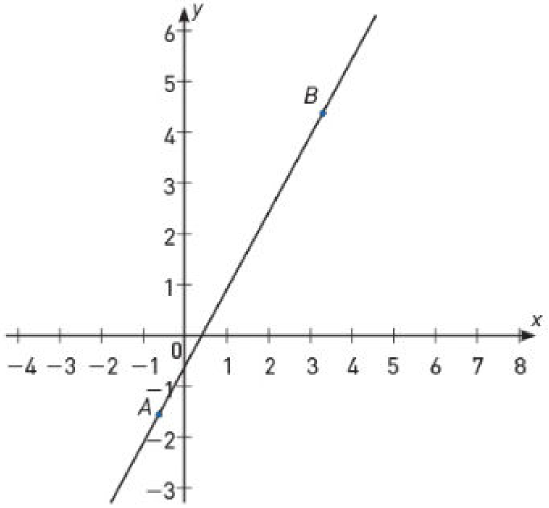
En la página www.geogebra.org/cms/ hay un programa de geometría para trabajar con puntos, rectas, líneas y figuras en el plano. En el Anexo 2 de este libro hallarás una guía para utilizarlo.

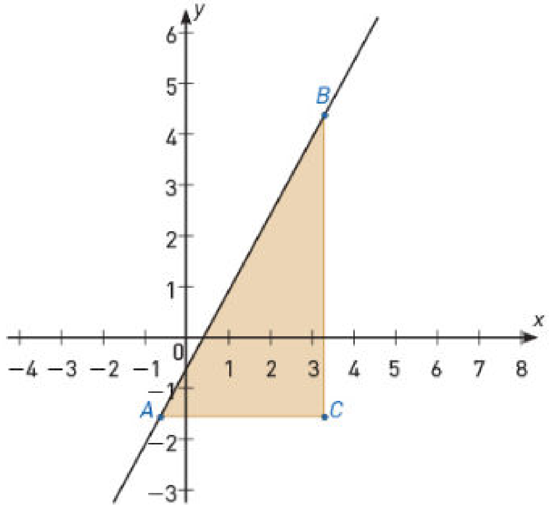
Haz lo siguiente en este *software*.

1. Marca dos puntos *A* y *B* cualesquiera. Después traza la recta que pasa por dichos puntos, como se ve en la figura de la izquierda.

   Observa que en la parte izquierda de la ventana del programa puedes ver las coordenadas de los puntos, así como la ecuación de la recta que trazaste.

2. Traza un triángulo rectángulo cuya hipotenusa se encuentre sobre la recta *AB*. Para dibujar este triángulo en la figura, se trazó el punto auxiliar *C* considerando las coordenadas de *A* y *B*. Calcula la pendiente de la recta. Observa que en el lado izquierdo puedes hallar las longitudes de los segmentos del triángulo trazado.




3. Localiza otros puntos sobre la recta, forma triángulos rectángulos cuya hipotenusa esté sobre la recta y calcula la pendiente. Verifica que las pendientes sean iguales.

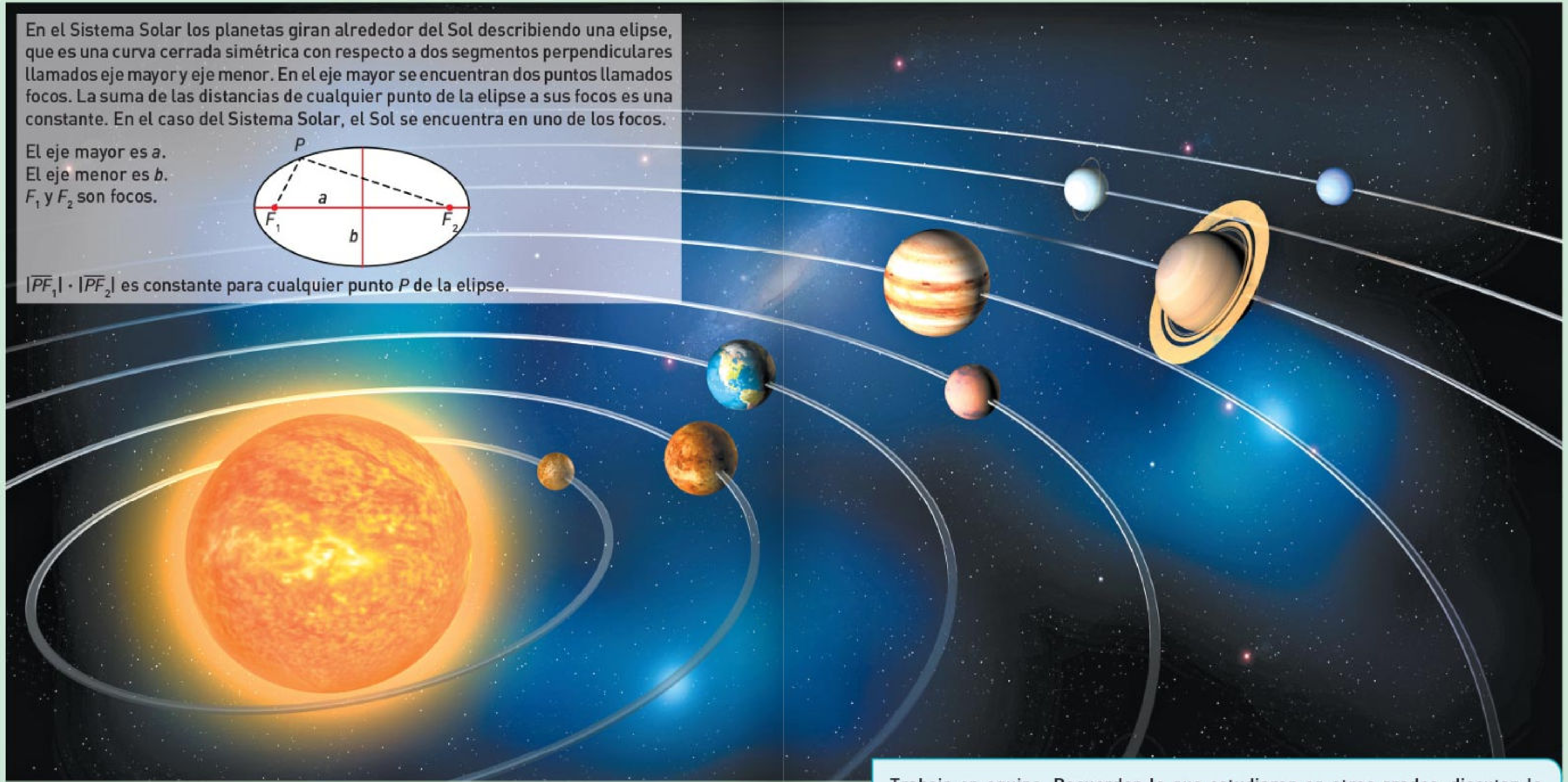
## Autoevaluación

Analiza tu desempeño respecto a los aprendizajes esperados del bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

| | Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos | Lo hago solo | Lo hago con ayuda de otros | Necesito la ayuda del profesor |
|---|---|---|---|---|
| Utilizar, en casos sencillos, expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. | | | | |
| Resolver problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. | | | | |
| Calcular y explicar el significado del rango y la desviación media. | | | | |

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.

# BLOQUE 5



En el Sistema Solar los planetas giran alrededor del Sol describiendo una elipse, que es una curva cerrada simétrica con respecto a dos segmentos perpendiculares llamados eje mayor y eje menor. En el eje mayor se encuentran dos puntos llamados focos. La suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a sus focos es una constante. En el caso del Sistema Solar, el Sol se encuentra en uno de los focos.

El eje mayor es $a$.
El eje menor es $b$.
$F_1$ y $F_2$ son focos.

$|\overline{PF_1}| \cdot |\overline{PF_2}|$ es constante para cualquier punto $P$ de la elipse.

## Aprendizajes esperados

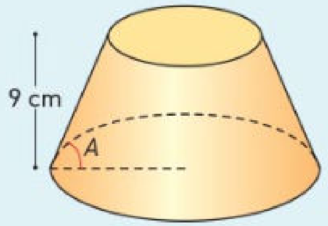
- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.



Trabaja en equipo. Recuerden lo que estudiaron en otros grados, discutan la información y respondan cada pregunta; lo importante es que compartan sus conocimientos. Investiguen en la biblioteca o en internet.

**1** Se efectuó un corte paralelo a la base en el cono de la ilustración. El cuerpo obtenido se llama *cono truncado*.

a) ¿Qué figura se forma en la superficie de corte? Si el corte no fuera paralelo a la base, ¿qué figura se formaría?
b) Si el ángulo $A$ mide 65° y el radio de la base 10 cm, ¿cuál es la altura del cono?
c) ¿Cuál es el volumen del cono truncado?



## Cálculos rápidos

Analiza los siguientes retos y encuentra al menos una solución para cada uno de ellos.

a) ¿Podrías encontrar una forma para calcular la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos con sólo sumar?

b) Halla una fórmula para calcular la diferencia de los cuadrados de dos números que difieran en dos unidades, sin necesidad de elevar al cuadrado.

c) Si un padre tiene 31 años y su hija 7, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será el triple que la de la hija?

d) Piensa un número cualquiera. Súmale 18. Toma la mitad de lo que has obtenido hasta ahora. Por último, resta la mitad el número que pensaste.

¿El resultado es 9?

Inventa otro procedimiento semejante en el que el resultado sea 15.



**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

Trabaja con un compañero para resolver los retos anteriores. Sigan la siguiente estrategia.

Comprendan el enunciado.

a) Lean el reto para que comprendan los datos y las actividades planteadas. Ya que lo entendieron, plantéenlo con sus palabras. Por ejemplo, para el caso del reto en la figura verde:

Dos números consecutivos son, por ejemplo, 7 y 8; la diferencia de sus cuadrados es $8^2 - 7^2$. ¿Cómo se calcula esta diferencia con una suma?

Busquen regularidades.

a) Pueden hacer una tabla como la siguiente:

| Diferencia de cuadrados | Resultado |
|---|---|
| $2^2 - 1^2 =$ | |
| $3^2 - 2^2 =$ | |
| $4^2 - 3^2 =$ | |
| $5^2 - 4^2 =$ | |
| $6^2 - 5^2 =$ | |
| $7^2 - 6^2 =$ | |
| $8^2 - 7^2 =$ | |

b) Observen los resultados e intenten encontrar patrones que se repitan.

Comprueben las regularidades.

a) Usen expresiones algebraicas para comprobar las regularidades. Recuerden que dos números consecutivos se pueden expresar como $x$ y $x + 1$. Entonces, la diferencia de cuadrados sería:

$$x^2 - (x + 1)^2$$

b) Usen sus conocimientos de álgebra para operar con la expresión anterior y obtengan una expresión que ratifique las regularidades que encontraron.

c) Comparen sus soluciones con las de otras parejas del grupo.

## Problemas y ecuaciones I

PREGUNTA INICIAL

El producto de dos números es 18 y su suma es 9.9. ¿Cuáles son esos números?

**1** Reúnete con un compañero. Lean las distintas situaciones planteadas a continuación y realicen las actividades que se indican.

a) Alfredo elaboró la siguiente tabla. Analícenla y escriban los datos que faltan.

| $x$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y^2$ | 1 | 9 | | | | | | | | |

b) Alfredo supone que todo número impar elevado al cuadrado debe ser impar. En el siguiente espacio, demuestren algebraicamente la afirmación de Alfredo.

c) El manejo de expresiones algebraicas es importante para organizar razonamientos y demostraciones. Por ejemplo, Federico hizo la siguiente tabla y asegura que el producto de dos números impares también es impar.

| Factor impar | Factor impar | Producto |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 15 |
| 7 | 9 | 63 |
| 1 | 41 | 41 |

Es imposible hacer una tabla con todas las multiplicaciones de números impares, pero podemos demostrar con expresiones algebraicas que lo dicho por Federico es correcto.

Un número impar es de la forma $2n + 1$, donde $n$ es un entero. Por ejemplo:

$1 = 2(0) + 1$ $3 = 2(1) + 1$ $5 = 2(2) + 1$ $7 = 2(3) + 1$

Entonces el producto de dos números impares cualesquiera se puede representar con la expresión $(2n + 1)(2m + 1)$ donde $n$ y $m$ son enteros. Completen las operaciones.

$(2n + 1)(2m + 1) =$ ________________

$=$ ________________

d) Escriban el resultado en la forma $2d + 1$, indiquen a qué es igual el número $d$ y justifiquen, en su cuaderno, por qué es entero. Con base en esto expliquen la afirmación: "El resultado de multiplicar cualesquiera números impares es de la forma $2d + 1$, donde $d$ es un entero; por lo tanto, es impar".

**Observa**

Te recomendamos que leas un libro que se encuentra en tu biblioteca escolar, el cual contiene gran variedad de problemas matemáticos y lógicos que te permitirán poner en práctica las técnicas aprendidas en esta lección. El libro es el siguiente: Moscovich, Ivan, *Brainmatics. Rompecabezas lógicos*, Königswinter, H. F. Ullmann, 2009.





**2** Trabaja con un compañero para que, con base en los enunciados, construyan tablas en los espacios en blanco. Justifiquen en las líneas si son o no verdaderos.

a) El cuadrado de todo número par es par.

Justifiquen su respuesta: ________________

b) La suma de dos números impares es par.

Justifiquen su respuesta: ________________

c) La suma de los múltiplos de 4 es un múltiplo de 8.

Justifiquen su respuesta: ________________

d) El producto de dos números pares es par.

Justifiquen su respuesta: ________________

**3** Para resolver la pregunta inicial de esta lección, trabajen en equipos de cuatro integrantes y planteen una ecuación que cumpla con las condiciones de la pregunta y obtengan su solución. Con ayuda de su profesor, comparen sus respuestas con las de otros equipos.

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

## Problemas y ecuaciones II

PREGUNTA INICIAL

¿Qué problema podrías resolver con la ecuación $x^2 - 5x + 2 = 0$?

En la vida cotidiana se presentan una gran cantidad de situaciones que exigen dar una solución matemática a determinadas incógnitas. Para estos casos, es necesario aprender a plantear algebraicamente tales situaciones.

**1** **Lee la siguiente situación, contesta las preguntas y al final plantea una oración que cumpla con todas las condiciones de cada problemática.**

a) La edad de Fernanda es actualmente el triple que la edad de su hija. Subraya la expresión algebraica que represente esta situación.

$F = 3H$ $\quad$ $H = 3F$ $\quad$ $F = \frac{1}{3}H$ $\quad$ $H = \frac{1}{3}F$

b) Hace seis años las edades de las dos sumaban 40 años. Completa la oración.

La expresión algebraica ___________ representa la edad que tenía Fernanda hace seis años, mientras que ___________ indica la edad de su hija hace seis años. Entonces, ___________ representa que hace seis años sus edades sumaban 40.

c) Sustituye la expresión que subrayaste en el inciso a) por la que planteaste en el inciso b). Escríbela: ___________.

d) Simplifica la ecuación y despeja la única incógnita de ésta. El resultado es la edad que tiene actualmente la hija de Fernanda. Por lo tanto, $H =$ ___________.

e) Sustituye la edad de la hija de Fernanda en la expresión del inciso a). El resultado es la edad que tiene actualmente Fernanda. Por lo tanto, $F =$ ___________.

f) A continuación escribe la oración que representa completamente las condiciones del problema que acabas de resolver: ___________

___________

**2** **Trabaja con un compañero para resolver el siguiente problema. Planteen las ecuaciones sólo en términos de $x$. Al final, escriban los resultados numéricos.**

El costo de un cuaderno más el de un lápiz suma \$32.00. El lápiz cuesta la séptima parte de lo que cuesta el cuaderno.

a) Si $x$ es el costo del cuaderno, entonces el costo del lápiz es: ___________.

b) La suma de los dos costos está dada por la ecuación: ___________.

c) Entonces el lápiz cuesta \$ ___________ y el cuaderno cuesta \$___________.

- Comparen con sus compañeros los resultados obtenidos y con ayuda del profesor resuelvan las dudas que hayan surgido.

**Recuerda**

Para dividir una fracción entre un número entero, primero forma una fracción cuyo denominador sea el entero y el numerador sea 1; después aplica la multiplicación de fracciones; es decir, numerador por numerador y denominador por denominador. Observa el ejemplo:

$\frac{3}{7} \div 4 = \frac{3}{7} \times \frac{1}{4} =$

$\frac{3 \times 1}{7 \times 4} = \frac{3}{28}$





**3** **Dividan al grupo en ocho equipos. Repartan al azar dos problemas a cada uno y resuélvanlos. No importa que dos equipos tengan el mismo problema.**

a) Al numerador y denominador de $\frac{4}{7}$ se les suma el mismo número. Se obtiene una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es el número que se sumó a $\frac{4}{7}$? ___________

b) Calculen las dimensiones de un terreno con forma rectangular que de largo mide $b$ cm, de ancho $\frac{1}{3}b$ cm y su área es de 48 $cm^2$.

Mide ___________ cm de largo y ___________ cm de ancho.

c) La diferencia de dos números es 15 y al dividir el doble del mayor entre el menor, el resultado es 3. ¿Cuáles son esos números? ___________

d) El lado menor de un rectángulo es $\frac{3}{4}$ partes del mayor; el doble del lado menor excede en 12 m al mayor. ¿Cuánto mide cada lado?

El lado mayor mide ___________ m y el menor, ___________ m.

e) Patricia y Claudia tienen \$450.00 entre las dos. Si Patricia le prestara a Claudia \$50.00, ésta tendría el doble de dinero que Patricia. ¿Cuánto dinero tiene cada una?

Patricia tiene \$ ___________ y Claudia, \$ ___________.

f) Si tres sillas y dos pupitres pesan 24 kg, y dos sillas con cuatro pupitres pesan 36 kg, ¿cuánto pesa cada mueble?

Una silla pesa ___________ kg y un pupitre pesa ___________ kg.

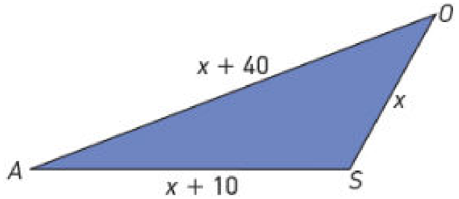
g) Las casas de Antonio, Olga y Susana están situadas en la posición que marcan los vértices del siguiente triángulo. Cuando Antonio va a buscar a Olga recorre 180 m.

¿Qué distancia hay entre las casas de los tres amigos?

Entre las casas de Antonio y Susana: ___________ m

Entre las casas de Susana y Olga: ___________ m

Entre las casas de Antonio y Olga: ___________ m




h) La relación entre las edades de dos hermanos, $M$ y $m$ ($M$ es mayor que $m$), está dada por las siguientes expresiones.

$M - m = 10$ $\quad$ $m = \frac{M}{6}$

Escriban en las líneas el problema que resulta de considerar las expresiones anteriores y después encuentren las edades de los dos hermanos.

___________

___________

El hermano mayor tiene ___________ años y el menor, ___________ años.

**4** **Para resolver la pregunta inicial de esta lección formen cuatro equipos uniendo de dos en dos los que formaron en la actividad anterior. Cada equipo pase al pizarrón a plantear una parte de la respuesta hasta que obtengan el resultado.**

**TIC**

Ingresa al sitio <televisioneducativa.gob.mx/index.php/videos-telesecundaria>. En él encontrarás un video producido por la telesecundaria de nuestro país, el cual explica varias maneras de plantear y resolver problemas matemáticos. Visítalo y pon en práctica lo aprendido ahí.

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

## Rompecabezas de sombras

**Analiza lo que piensa hacer Teresa y haz las actividades que se te indican.**

Teresa tiene tres cilindros y dos conos de madera. Cada uno de los cinco cuerpos se puede dividir en dos piezas. Las siguientes son sombras de dichas piezas.

a) Une mediante una línea cada pieza con la que le corresponde.

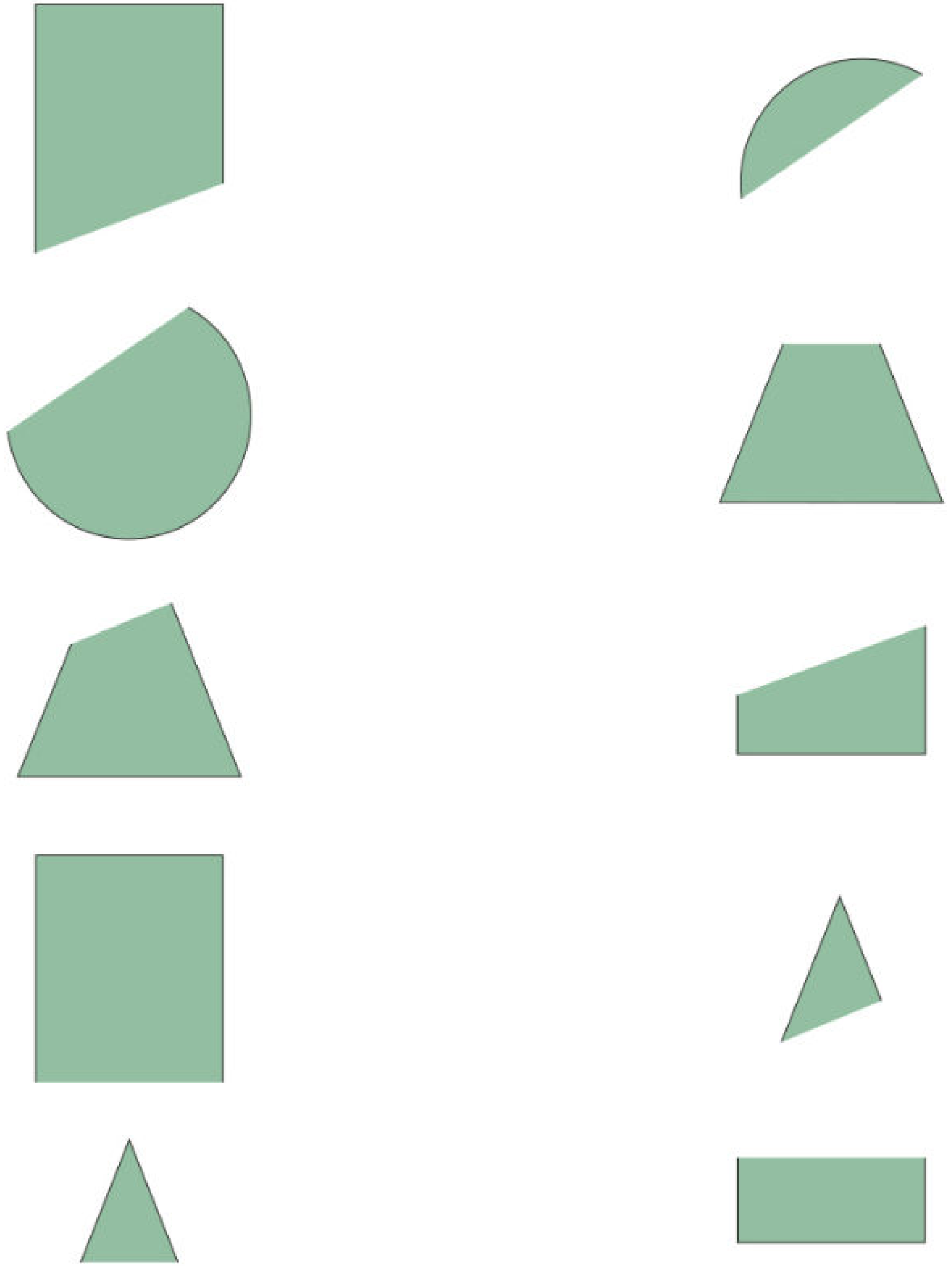
I

II

III

IV

V





b) Imagina cómo es la superficie que une las partes de cada cuerpo y dibújalas.

I

II

III

IV

V

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y argumenten cómo determinaron qué figuras dibujar.

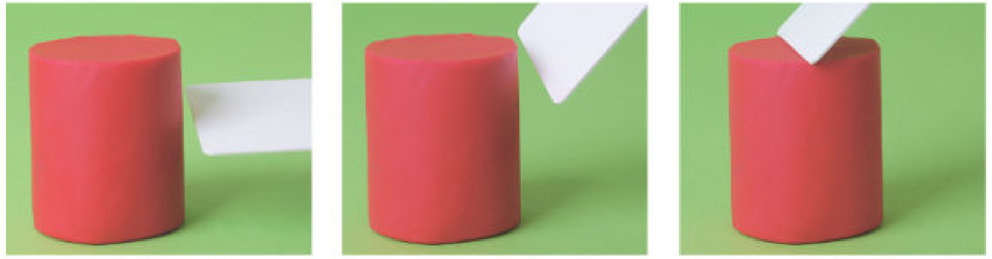
## Secciones

PREGUNTA INICIAL

Si un cilindro es cortado verticalmente en dos, ¿qué figuras se forman en los planos de corte? ¿Y en el caso de un cono?

**1** **Reúnanse en equipos, consigan plastilina y elaboren con ella varios cuerpos como los siguientes.**

a) Con una tarjeta de plástico corten un cilindro como se ilustra en la imagen de abajo.



b) Comenten la siguiente información y decidan cuáles son las secciones del cilindro que hallaron al cortarlo con la tarjeta.

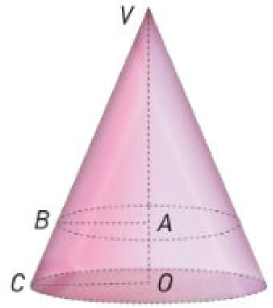
Una *sección* de un cuerpo geométrico es la figura que resulta de intersecar dicho cuerpo con un plano.

c) Dibujen en sus cuadernos las secciones que encontraron.
d) Dibujen en sus cuadernos las secciones del cono que se obtienen al cortarlo, como se ve en la imagen.

**2** Ensayen distintos cortes al cono, prueben al menos cinco ángulos diferentes. En su cuaderno hagan esquemas de esta actividad, mostrando los cortes y figuras resultantes.



**3** Observa la imagen del cono y responde lo que se indica.




El radio de la base del cono, $\overline{OC}$, mide 4 cm; su altura, $\overline{VO}$, mide 10 cm.

a) ¿Cuánto mide la generatriz ($\overline{VC}$) del cono? ____________

b) ¿Cómo lo calculaste? ____________

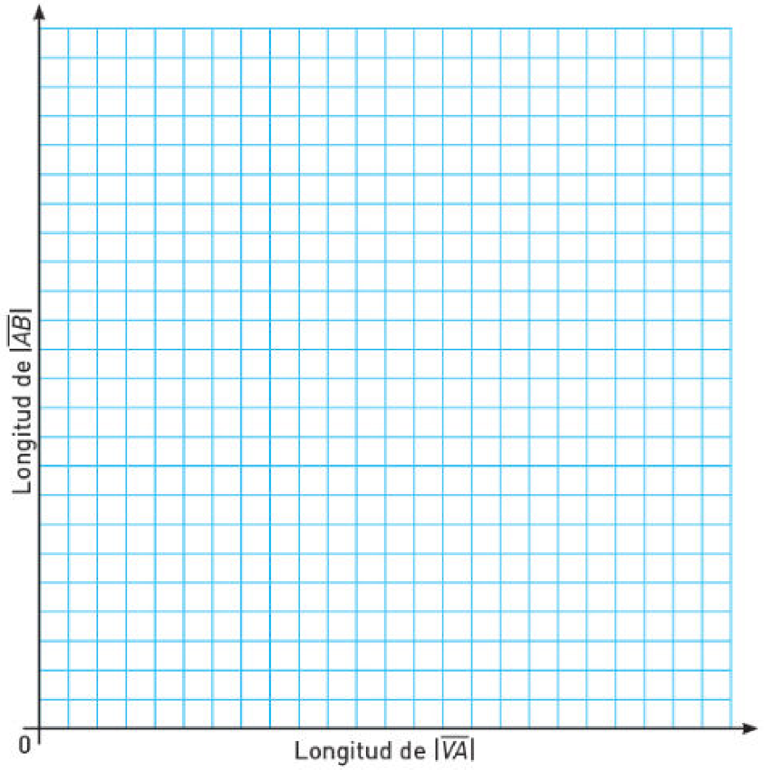
____________

c) Si $|\overline{VA}| = 7$ cm, ¿cuánto mide $\overline{AB}$? ____________

- Comenta con tus compañeros las estrategias que siguieron para hallar la medida de la generatriz y la de $\overline{AB}$.

**4** **Completa la tabla y grafica los valores en el plano cartesiano. Escoge la escala que consideres más adecuada.**

| $\lvert\overline{VA}\rvert$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert\overline{AB}\rvert$ | | | | | | | | | | | |




**5** Formen equipos para resolver en su cuaderno la pregunta inicial de esta lección. Tracen dos conos con diferente base y altura, y hagan las tablas y gráficas respectivas que les permitan comparar la variación en estas medidas. Realicen los trazos que representen los cortes indicados en la pregunta inicial y obtengan la respuesta.

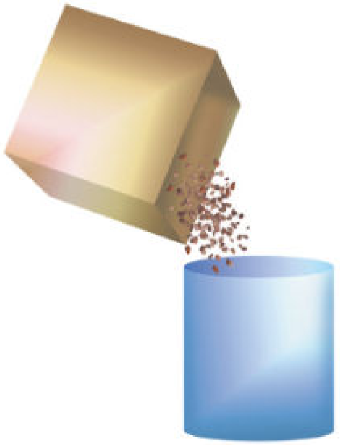
Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

## Volumen del cilindro y del cono I

PREGUNTA INICIAL

¿Cuál es la relación entre el volumen de un cilindro y el de un cono de la misma altura y con el mismo radio de la base?

**1** Construye un prisma cuadrangular en cartón o cartulina. El lado de la base debe medir 5.3 cm y la altura, 10 cm. Déjalo sin una base, es decir, sin tapa.



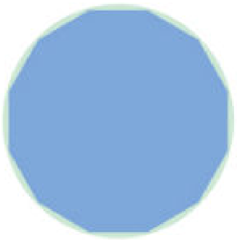
a) Llena tu prisma de arena o de alguna semilla, como arroz o alpiste.
b) Vacía el contenido del prisma en el cilindro que construiste en la actividad 3 de la lección 61 (página 181).
c) ¿Qué observas? ____________
d) ¿Cómo son los volúmenes de ambos cuerpos? ____________
e) Calcula el volumen del prisma que construiste: ____________
f) Calcula el área de la base del cilindro y multiplícala por su altura. Anota tu resultado: ____________
g) ¿Cuánto se aproximan los valores que obtuviste en los incisos e) y f)? ____________

**Recuerda**

El área de un círculo se calcula con la fórmula: $A = \pi r^2$.

Ésta sólo depende de la longitud del radio, el cual, en cualquier caso, siempre mide la mitad del diámetro. El número $\pi$ es una constante, por eso siempre le damos el mismo valor de 3.14.

**2** Analiza los siguientes cuerpos. Uno es un prisma dodecagonal y el otro es un cilindro. Ambos cuerpos tienen la misma altura.



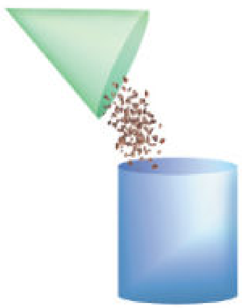
La base del prisma se puede inscribir en la del cilindro.

a) ¿Cómo son los volúmenes de ambos cuerpos? ____________
b) ¿Cómo se calcula el volumen de un prisma? ____________
c) Cada lado de la base del prisma mide 3.62 cm; la apotema, 6.76 cm. ¿Cuál es su volumen? ____________
d) ¿El valor anterior es una buena aproximación del volumen del cilindro? ¿Por qué?
____________



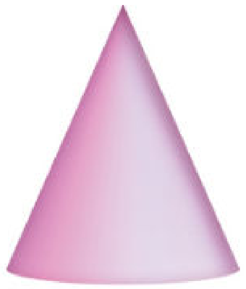


**3** Calcula la generatriz de un cono que mide 10 cm de altura y 3 cm de radio de la base. Después construye un cono sin tapa que tenga esas dimensiones.



a) Llena el cono de arena o semillas y vacía el contenido en el cilindro que construiste antes.
b) ¿Qué puedes decir del volumen de ambos cuerpos? ____________
____________

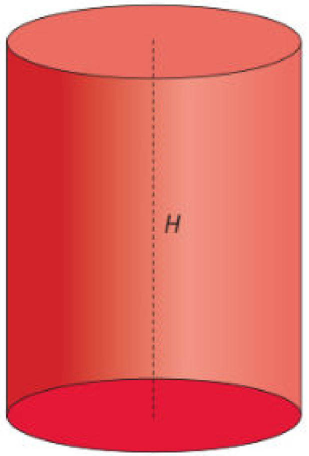
**4** Observa los siguientes cuerpos y contesta.



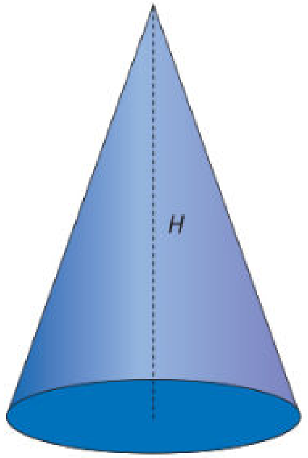
a) ¿Cómo son los volúmenes de ambos cuerpos?
____________
b) ¿Cómo se calcula el volumen de una pirámide?
____________
c) ¿Crees que el volumen del cono se calcule de manera similar al de una pirámide? ____________
¿Por qué? ____________
____________

**5** Para responder la pregunta inicial de esta lección, analicen la siguiente información y seleccionen a dos compañeros para que calculen el volumen de un cono y un cilindro con base y alturas iguales en el pizarrón. Calculen la proporción de uno y de otro y obtengan conclusiones en grupo.

| | |
|---|---|
| El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base por la altura. | El volumen de un cono se calcula multiplicando el área de la base por la altura, y el resultado se divide entre 3. |




$V = A_b \times H$




$V = \frac{A_b \times H}{3}$

$A_b$ = Área de la base

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

## Volumen del cilindro y del cono II

**PREGUNTA INICIAL**

El volumen de un cono es 31.4 $m^3$. ¿Cuáles pueden ser su altura y radio de la base?

**1** Estima el volumen de cada cuerpo y después calcúlalo. Considera $\pi$ · 3.14.

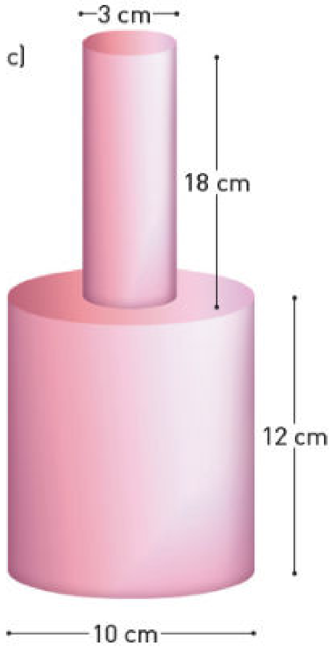
a)


V · ____________

b)

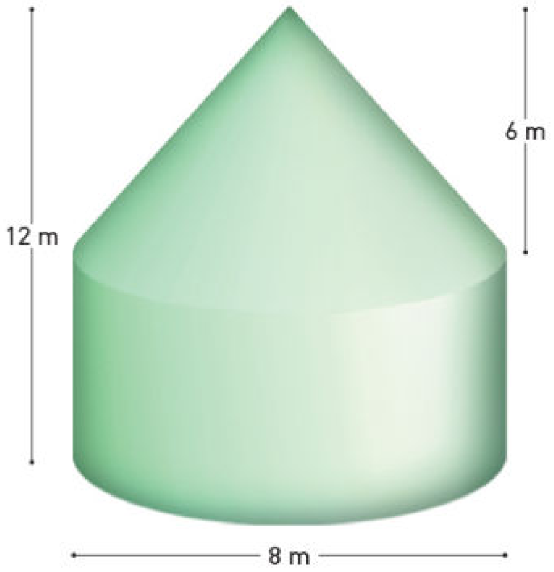

V · ____________

c)




V · ____________

d)

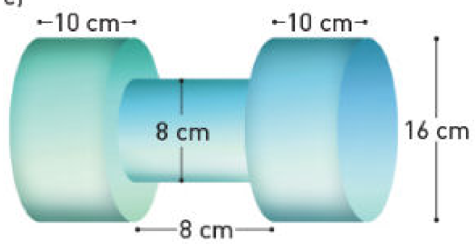



V · ____________

**TIC**

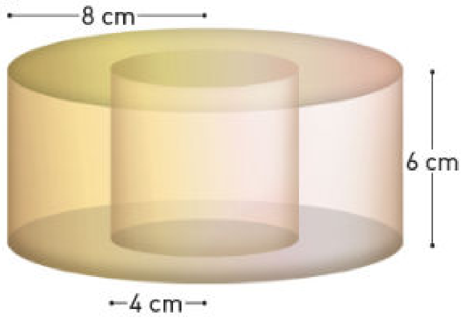
Ingresa al sitio <www.encicloabierta.org/node/376>. Da clic en Abrir y observa el material interactivo que te ofrece la ventana nueva. Comparte esa experiencia con tus compañeros y con ayuda de su profesor generen conclusiones respecto a la forma de calcular volúmenes de conos y cilindros.

e)



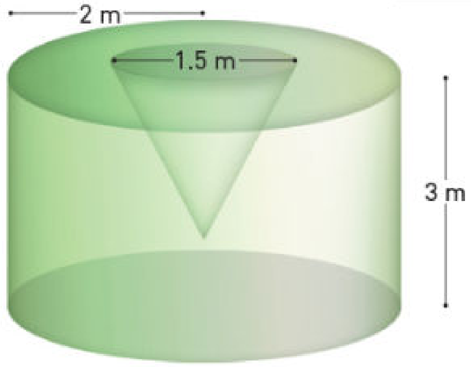

V · ____________

f)




V · ____________

g)




V · ____________

**2** Contesta las siguientes preguntas. Considera $\pi$ · 3.14.

a) El área de la base de un cilindro es 78.5 $cm^2$ y su volumen, 549.5 $cm^3$. ¿Cuál es su altura? ____________

b) El radio de la base de un cilindro mide 4 cm y su volumen es 376.8 $cm^3$. ¿Cuál es su altura? ____________

c) El volumen de un cono es 153.86 $cm^3$ y su altura mide 12 cm. ¿Cuál es el radio de su base? ____________

d) Un tinaco tiene forma cilíndrica y puede contener 21 980 litros de agua. Si el radio de la base mide 1 m, ¿cuál es su altura? ____________

e) El volumen de un cilindro es 1 406.72 $cm^3$. Calcula la altura y el radio de la base.

____________

**3** Para responder la pregunta inicial, trabajen en equipos de tres integrantes. Sustituyan los valores conocidos en la fórmula para calcular el volumen de un cono. Para los valores desconocidos, sugieran tres respuestas diferentes que cumplan con las condiciones del problema.

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

## Volumen del cilindro y del cono III

**PREGUNTA INICIAL**

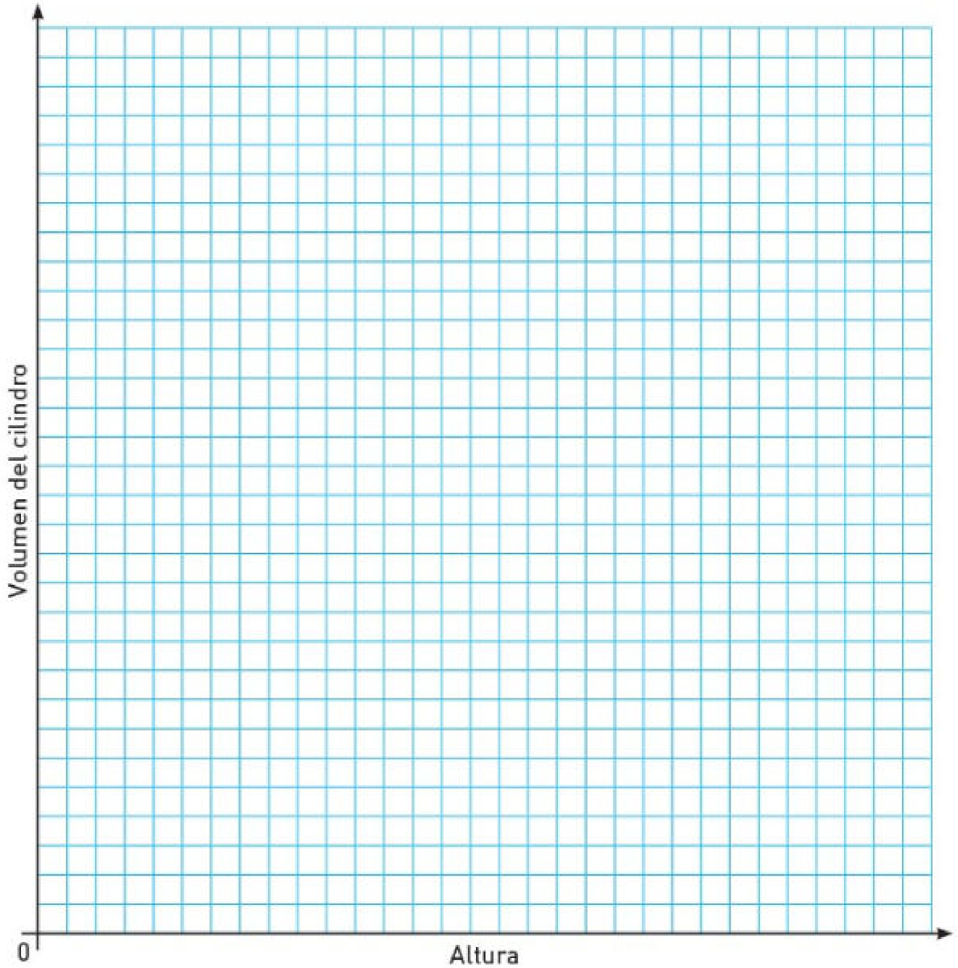
Si la altura de un cilindro aumenta 1 cm, ¿de qué depende el aumento en su volumen?

**1** La base de un cilindro mide 10 m². Analiza los datos propuestos y realiza las actividades.

a) Completa la tabla con los volúmenes del cilindro de acuerdo con los valores de la altura indicados.

| Altura (m) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Volumen (m³) | | | | | | | | | | |

b) Representa los puntos en el plano cartesiano. Escoge la escala adecuada.




c) ¿Cómo se relacionan la altura y el volumen de un cilindro? ____________________

________________________________________

**TIC**

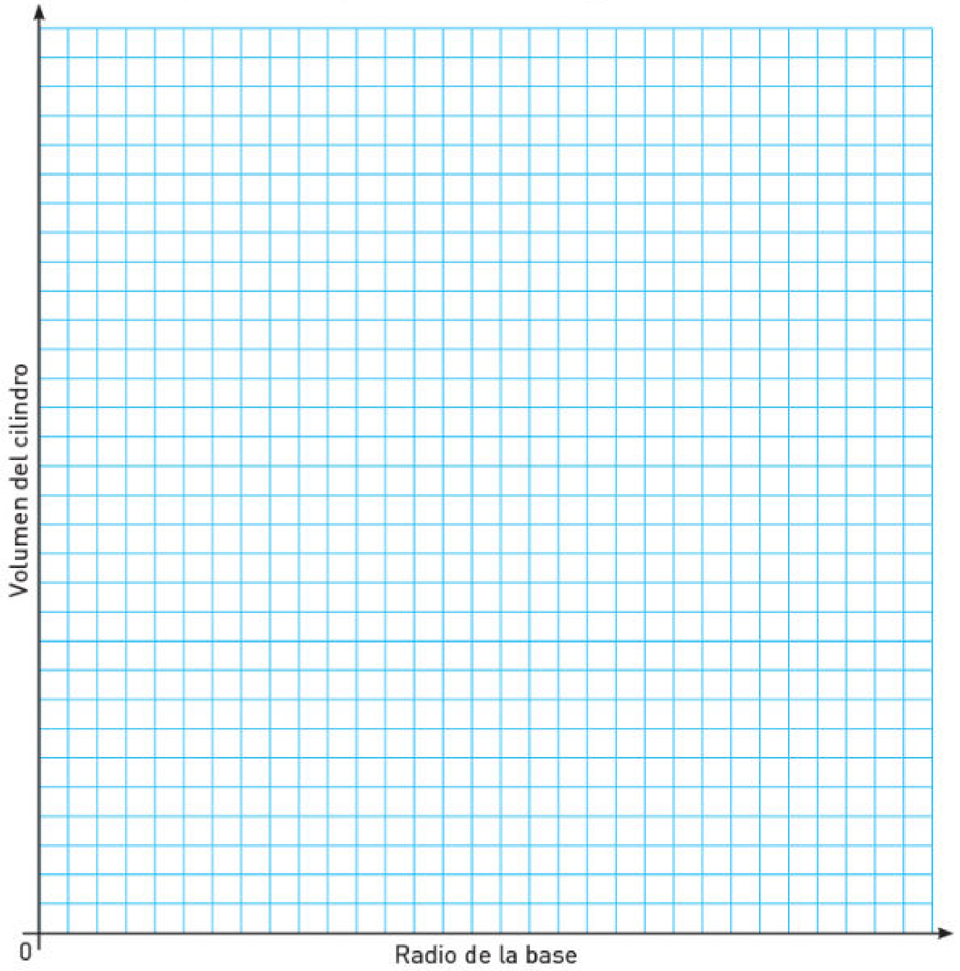
Ingresa al sitio <www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110926_cilindros.elp/rea_del_cilindro.html>. Contiene conceptos, ejemplos y ejercicios sobre los cilindros. Si es posible, visítalo con un compañero y juntos analicen su contenido. Después compartan con el grupo y su profesor las dudas que les hayan surgido.

**2** La altura de un cilindro mide 1 m. Analiza los datos propuestos y haz las actividades.

a) Completa la tabla con los volúmenes del cilindro de acuerdo con los valores del radio indicados en ésta.

| Radio (m) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Volumen (m³) | | | | | | | | | | |

b) Representa los puntos en el plano cartesiano. Escoge la escala adecuada.




c) ¿Cómo se relacionan el radio de la base y el volumen del cilindro? ____________________

________________________________________

**3** Para responder la pregunta inicial, organizados por su profesor y en forma grupal, calculen el volumen de un cilindro con las medidas que su profesor sugiera, apliquen las condiciones indicadas en el problema y analicen los resultados. Planteen qué sucede si la altura se aumenta al doble.

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

## Volumen del cilindro y del cono IV

**PREGUNTA INICIAL**

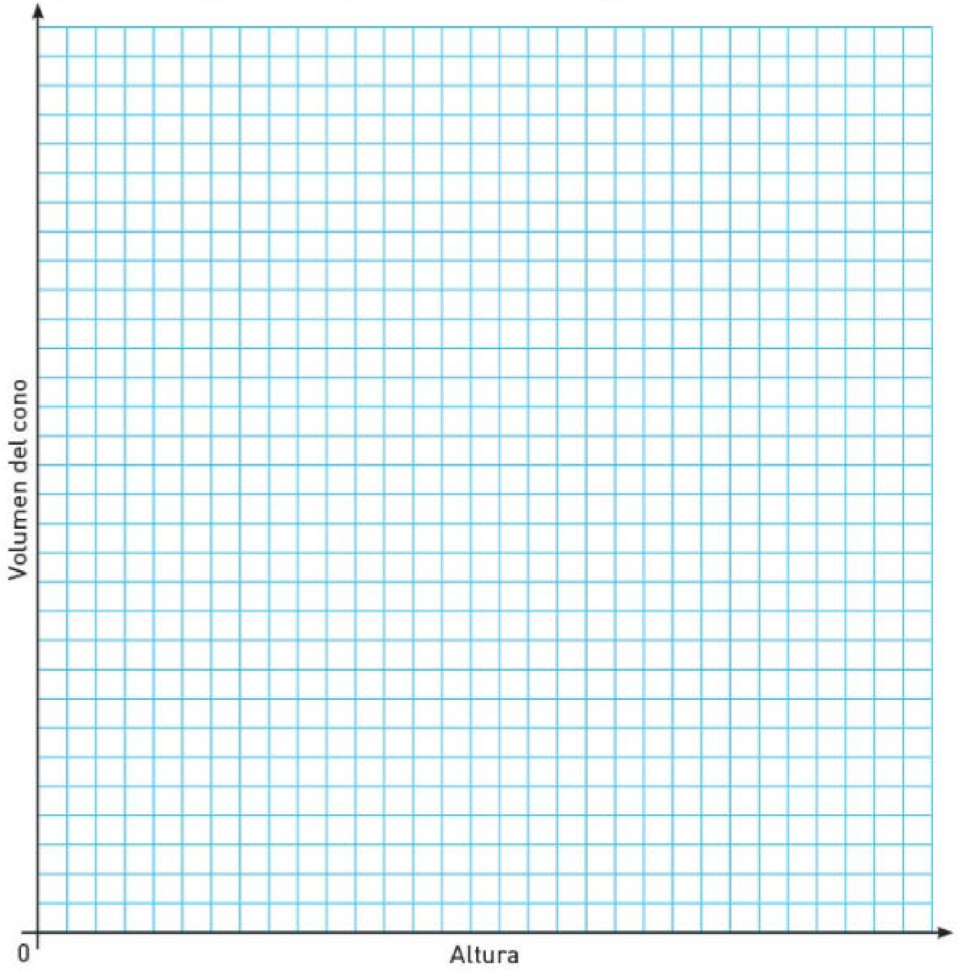
Si el radio de la base de un cono se aumenta al doble, ¿cuánto aumenta su volumen?

**1** La base de un cono mide 5 $m^2$. Analiza la información y haz las actividades. Considera $\pi \cdot 3.14$.

a) Completa la tabla con los volúmenes del cono. Considera las distintas medidas para la altura.

| Altura (m) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Volumen ($m^3$) | | | | | | | | | | |

b) Representa los puntos en el plano cartesiano. Escoge la escala adecuada.




c) ¿Cómo se relacionan la altura y el volumen de un cono? ____________________

____________________

**TIC**

Ingresa al sitio <www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110919_conos.elp/elementos_del_cono.html>. En éste se ofrece una gran variedad de información referente al estudio de los elementos del cono. Te servirá para practicar y reafirmar los conocimientos que has adquirido en este libro. Visítalo y si te surge alguna duda, pide ayuda a tu profesor.



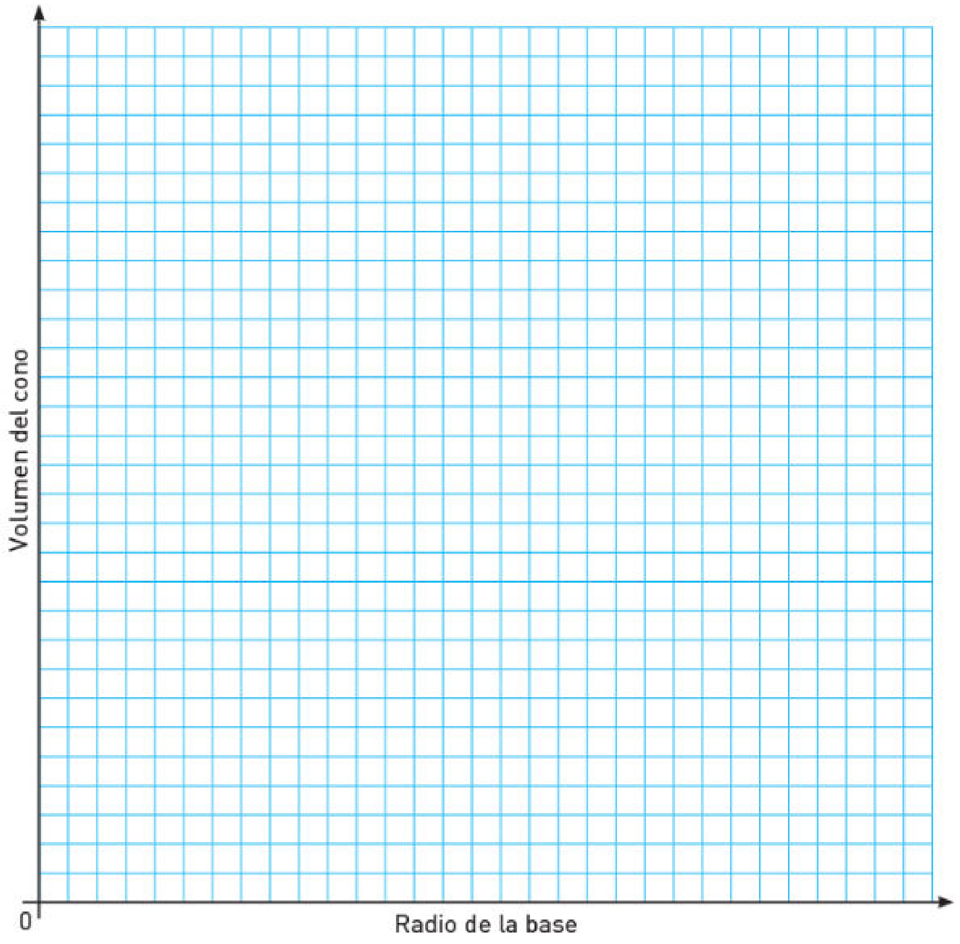


**2** La altura de un cono es 2 m. Revisa los datos proporcionados y haz las actividades indicadas.

a) Completa la tabla con los volúmenes del cono que corresponden a cada medida del radio.

| Radio (m) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Volumen ($m^3$) | | | | | | | | | | |

b) Representa los puntos en el plano cartesiano. Escoge la escala adecuada.




c) ¿Cómo se relacionan el radio de la base y el volumen del cono? ____________________

____________________

**3** Para responder la pregunta inicial, organizados por su profesor y en forma grupal, calculen el volumen de un cono con las medidas que su profesor sugiera, apliquen las condiciones indicadas en el problema y analicen los resultados. Justifiquen la relación que existe entre el radio de la base y el volumen de un cono.

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

## Justicia ciega

### Dos dados

Para este juego necesitas un par de dados. Participan dos personas: uno será el jugador 1 y el otro, el jugador 2. Cada uno lanza los dados por turnos.

Jugador 1: gana si la resta de los puntos es 0, 1 o 2.
Jugador 2: gana si la resta de los puntos es 3, 4 o 5.

¿Qué jugador, 1 o 2, prefieres ser? ¿Por qué?

### Carrera de monedas

a) Necesitas tres monedas y un tablero como el que se muestra a continuación.

| M | E | T | A |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| Tres soles | Sol y dos águilas | Águila y dos soles | Tres águilas |

b) Pueden jugar cuatro personas que se nombran como sigue:

Jugador 1: tres soles.
Jugador 2: sol y dos águilas.
Jugador 3: águila y dos soles.
Jugador 4: tres águilas.

c) Se tiran las monedas y, según lo que haya salido, el jugador correspondiente avanza una casilla.

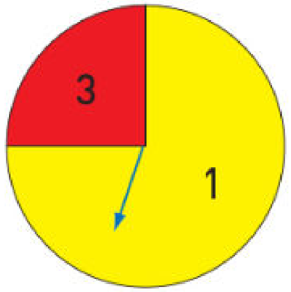
d) Gana el jugador que llegue antes a la meta.

¿Es un juego justo?



### Las ruletas

a) Se juega entre dos personas con una ruleta como la siguiente, que puedes elaborar con cartulina.



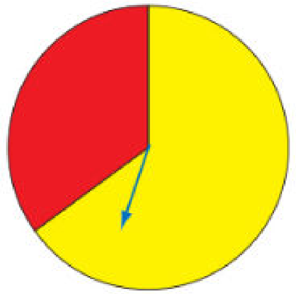

Un participante será el jugador 1 y el otro, el jugador 2.

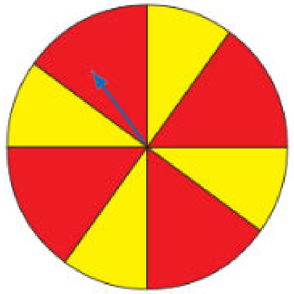
b) Si la ruleta cae en el color rojo, el jugador 1 obtendrá tres puntos y si la ruleta cae en el otro color, el jugador 2 conseguirá un punto.

c) Gana quien llegue primero a 15 puntos.

¿El juego es justo?

¿Qué valor le darías a cada región de ruletas como las siguientes para que sean justas?





### El área del dado

Jaime está haciendo dados de cartulina. Si suponemos que no hay desperdicio de material y que no se ponen pestañas, ¿cuántos dados de 1 cm de arista puede hacer con 3 $dm^2$ de cartulina?

**PISTAS Y ESTRATEGIAS**

a) Escojan un juego de esta página y llévenlo a cabo. Registren los resultados en tablas de frecuencia absoluta y frecuencia relativa como la siguiente.

| | Juegos ganados | |
|---|---|---|
| | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
| Jugador 1 | | |
| Jugador 2 | | |

b) Reúnan los resultados de todo el grupo y determinen, con base en las frecuencias relativas, si los juegos son justos o no.

## Variación lineal y cuadrática I

**PREGUNTA INICIAL**

¿Qué significa que dos variables se relacionen de manera lineal o cuadrática?

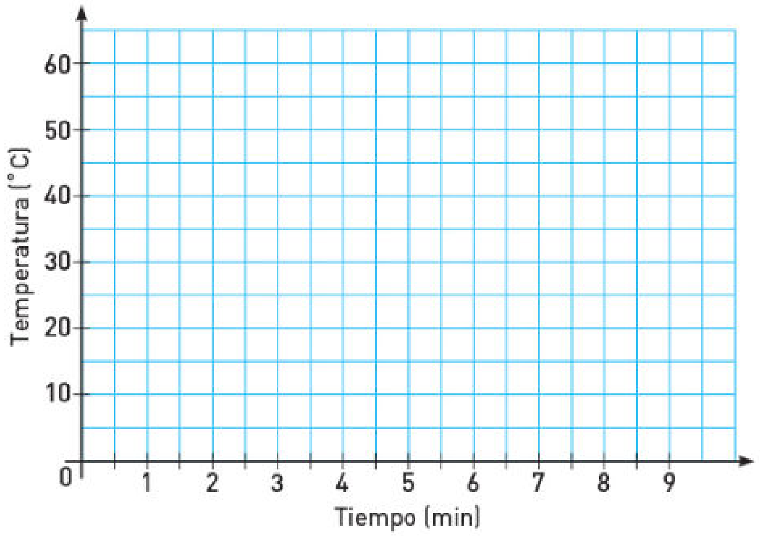
**1** **Analiza la siguiente situación, haz las actividades y contesta las preguntas en tu cuaderno.**

En cierto experimento, la temperatura inicial de una sustancia es 20 °C y luego ésta aumenta 5 °C cada minuto.

a) Completa la tabla.

| Tiempo (min) | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (°C) | | | | | | | | |

b) Traza la gráfica que representa la relación entre el tiempo y la temperatura.




c) Denota con $T$ la temperatura y con $t$ el tiempo y escribe una expresión algebraica que relacione ambas magnitudes. ____________________

d) ¿Cuál será la temperatura de la sustancia después de una hora?

e) ¿La gráfica es de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

f) ¿Qué forma tiene la gráfica y por qué es así?

- Compara la expresión que anotaste en el inciso c) con las de tus compañeros. Discutan si obtuvieron expresiones distintas pero equivalentes. Después comparen sus respuestas a las preguntas de los incisos d), e) y f), y justifíquenlas.



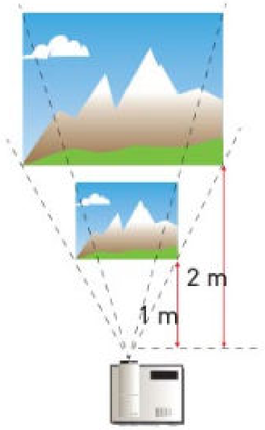


**2** Reúnete con un compañero para leer la situación y efectuar lo que se pide.

Un proyector genera una imagen rectangular entre cuyos lados hay una razón de 4:3. El tamaño de la imagen que genera un proyector depende de su distancia a la pantalla.

a) Completen la tabla.

| Distancia (m) | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Ancho de la pantalla (m) | 2 | 4 | 6 | |
| Largo de la pantalla (m) | $2\frac{2}{3}$ | | | |
| Área de la pantalla (m²) | | | | |

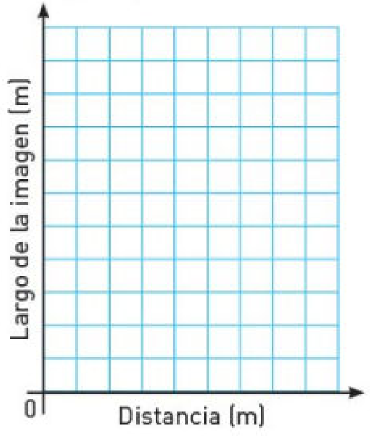


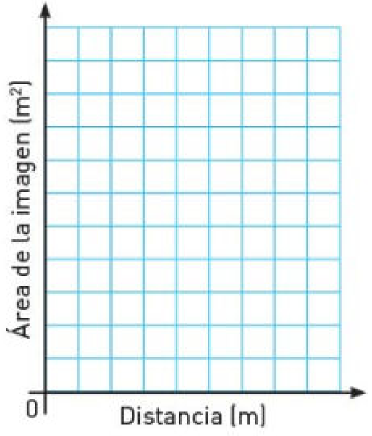

b) Denoten con $d$ la distancia del proyector a la pantalla y con $l$ la longitud del largo de la imagen. Escriban una fórmula que relacione ambas cantidades: ____________________

c) Denoten con $d$ la distancia del proyector a la pantalla y con $a$ el área de la pantalla. Escriban una expresión algebraica que relacione ambas cantidades: ____________

d) Tracen la gráfica que representa la relación entre $d$ y $l$ en el plano del lado izquierdo y la que representa la relación entre $d$ y $a$ en el plano del lado derecho.

e) Responde en tu cuaderno, ¿cuál de las relaciones anteriores es de proporcionalidad directa? ¿Por qué?




f) ¿A qué distancia de la pantalla se debe colocar el proyector si se desea obtener una imagen de 16 m²? Contesta en tu cuaderno.

**3** **Lean la siguiente información y contesten la pregunta inicial. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.**

Si la gráfica de dos valores es una línea recta, existe una relación de proporcionalidad directa y, por tanto, una *variación lineal* entre los dos valores.

**Observa**

Si te atraen temas como la tecnología, inventos modernos, telefonía celular o cómo funciona el proyector de una pantalla, te recomendamos la lectura del siguiente libro perteneciente a la colección Libros del Rincón:

Bailey, Gerry, *Inventos de alta tecnología*, México, SEP-Ediciones SM, 2006.

**Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.**

## Variación lineal y cuadrática II

PREGUNTA INICIAL

¿Cuál es la diferencia entre una gráfica de variación lineal y una de variación cuadrática?

**1** Considera la situación, completa las tablas y en tu cuaderno haz lo que se pide. Justifica tus respuestas.

Un automóvil deportivo arranca y mantiene aceleración constante durante 10 s.

a) Elabora la gráfica de la relación entre la velocidad y el tiempo.

b) ¿La relación entre el tiempo y la velocidad es de proporcionalidad directa?

c) ¿Cómo cambiaría la gráfica si la aceleración constante fuera menor? ¿En ese caso la relación entre el tiempo y la velocidad sería de proporcionalidad directa?

d) ¿Cómo cambiaría la gráfica si la aceleración se mantuviera constante, pero la velocidad inicial; es decir, la del tiempo 0 fuera de 2 m/s? ¿En ese caso la relación entre el tiempo y la velocidad sería de proporcionalidad directa?

| Tiempo (s) | Velocidad (m/s) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

**Recuerda**

En una relación lineal entre dos cantidades si una cambia, el valor de la otra cambia en la misma proporción. Por ejemplo, entre el 3 y el 11: si el 3 aumenta al triple, el 11 también lo hace, así que al final tenemos 9 y 33.

e) Completa la segunda tabla que registra la distancia recorrida por el automóvil en cada segundo.

f) Elabora la gráfica de la relación entre la distancia recorrida y el tiempo.

g) ¿La relación entre el tiempo y la distancia es de proporcionalidad directa?

h) ¿Cómo cambiaría la gráfica si la aceleración constante fuera menor?

i) ¿Cómo cambiaría la gráfica si la aceleración se mantuviera constante y la velocidad inicial; es decir, la del tiempo 0 fuera de 2 m/s?

| Tiempo (s) | Distancia (m) |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 12 |
| 2 | 27 |
| 3 | |
| 4 | 75 |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | 147 |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | 300 |

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y digan qué tipo de relación se presenta en cada caso.



**2** Dibuja en tu cuaderno la gráfica de una relación de proporcionalidad y otra que sea una línea pero no represente una relación de proporcionalidad. Comenta con tus compañeros cuál es la diferencia entre una y otra y cómo son las expresiones algebraicas de cada una.

**3** Contesta estas preguntas respecto a la gráfica de $y = x^2$.

a) La gráfica tiene un eje de simetría, ¿cuál es? ____________

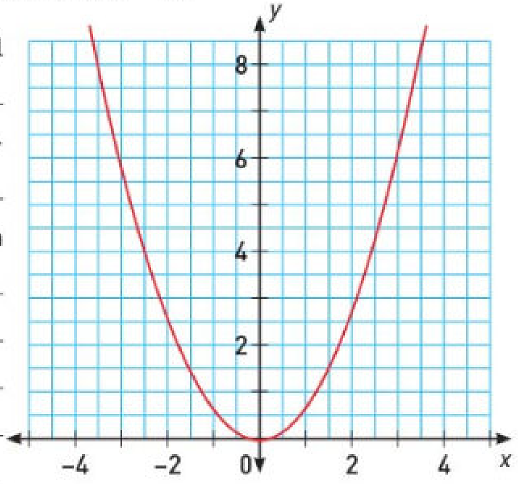
b) ¿Cuál es el menor valor que toma la variable $y$? ____________

c) ¿Cuál sería la diferencia entre la gráfica de $y = x^2$ y $y = x^2 + 3$? ____________

____________

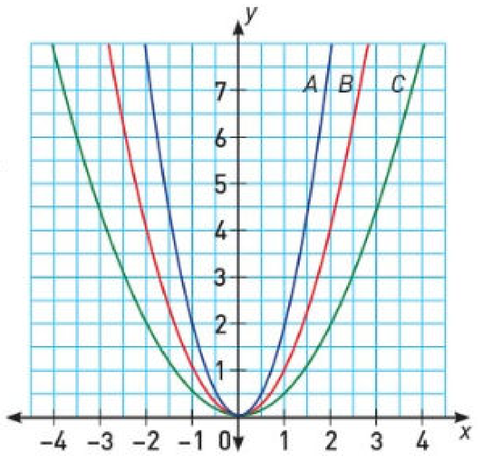
____________

____________




**4** Reúnete con un compañero y contesten.

En el plano se presentan las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 2x^2$.




a) Anoten en cada paréntesis la letra correcta.

$y = x^2$ (  )  $y = \frac{1}{2}x^2$ (  )  $y = 2x^2$ (  )

b) Completen la tabla.

| | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | | | |
| $y = \frac{1}{2}x^2$ | | | |
| $y = 2x^2$ | | | |

c) Utilicen los valores de la tabla anterior para verificar su respuesta al inciso a) y si es necesario, corríjanla.

d) Si $a$ es menor que 1 y mayor que 0, ¿qué diferencias hay entre la gráfica de $y = ax^2$ y $y = x^2$? Contesta en tu cuaderno.

e) Si $a$ es mayor que 1, ¿qué diferencias hay entre la gráfica de $y = ax^2$ y $y = x^2$?

**5** Para responder la pregunta inicial, en grupo y organizados por su profesor, elaboren las gráficas de las funciones $y \cdot 2x \cdot 1$ y $y \cdot 2x^2 \cdot 1$. Observen las diferencias y redacten sus conclusiones.

*Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.*

## Juegos justos I

PREGUNTA INICIAL

¿Todos los billetes de lotería tienen la misma probabilidad de ser premiados? ¿Por qué?

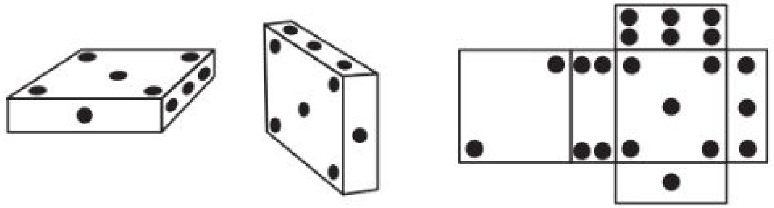
**1** Analiza los siguientes problemas y contéstalos.

a) Cuando lanzas un dado como el de la ilustración, que no está cargado, ¿todas las caras tienen la misma probabilidad de salir? Escribe la probabilidad de que salga cada cara.

$P(1) =$ ________ $P(2) =$ ________ $P(3) =$ ________

$P(4) =$ ________ $P(5) =$ ________ $P(6) =$ ________

b) Supón que se lanza este dado.



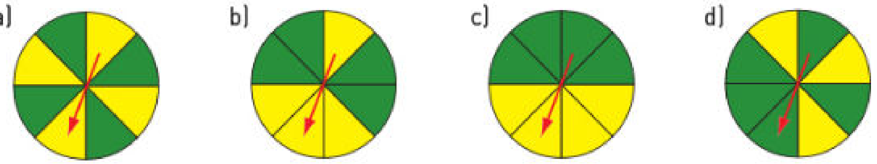
¿Todas las caras tiene la misma probabilidad de salir? _____ Escribe qué caras tienen mayor probabilidad de salir: ____________________

**Observa**

Existen juegos, como el dominó, los dados o la ruleta, en los que interviene el azar. La *probabilidad* permite analizar el comportamiento de eventos como los estudiados en esta lección.

**2** Marca con ✓ las ruletas en que sea igualmente probable obtener rojo que amarillo. Después, reúnete con un compañero y expliquen sus respuestas.

a) b) c) d)



☐ ☐ ☐ ☐

**3** Reúnete con un compañero para leer la información y escribir en su cuaderno dos ejemplos de eventos equiprobables.

En un experimento aleatorio los *resultados equiprobables* son los que tienen la misma posibilidad de ocurrir.

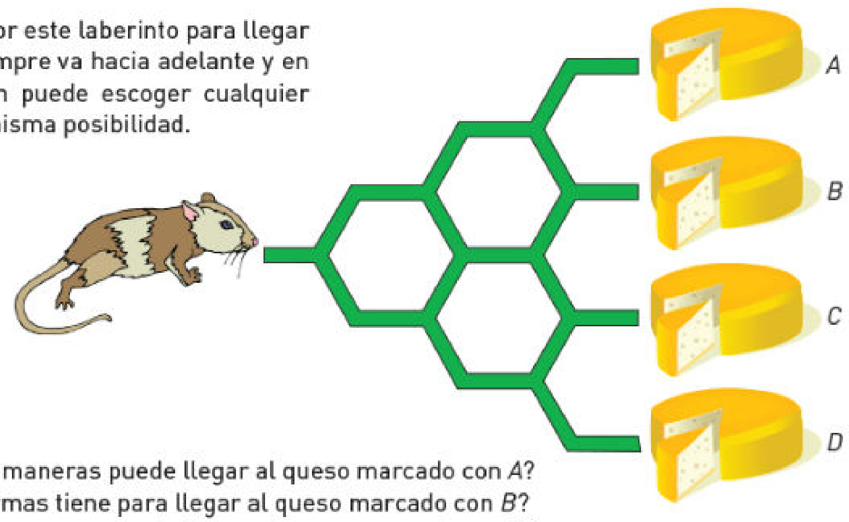
Cuando se lanza una moneda, la probabilidad de que salga sol es igual que la probabilidad de que salga águila. Entonces "sale sol" y "sale águila" son resultados equiprobables.





**4** Analiza el problema del ratón y responde las preguntas en tu cuaderno.

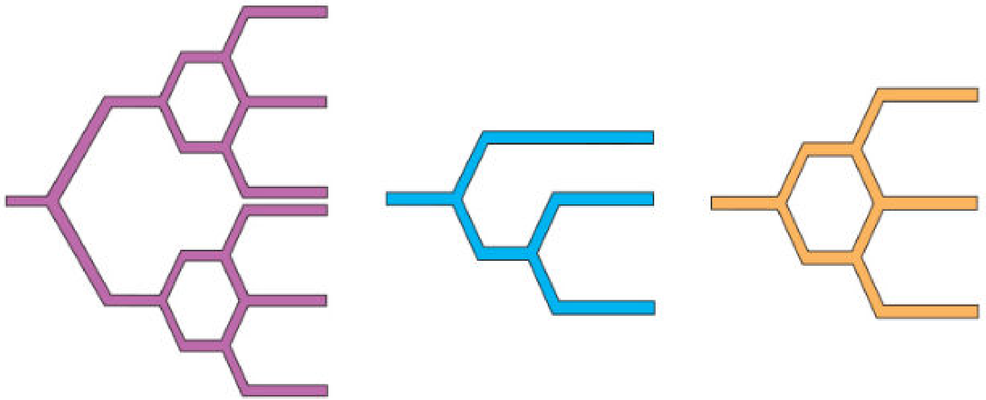
Un ratón viaja por este laberinto para llegar a un queso. Siempre va hacia adelante y en cada bifurcación puede escoger cualquier camino con la misma posibilidad.




a) ¿De cuántas maneras puede llegar al queso marcado con *A*?
b) ¿Cuántas formas tiene para llegar al queso marcado con *B*?
c) ¿De cuántas maneras puede llegar al queso marcado con *C*?
d) ¿Cuántas formas tiene para llegar al queso marcado con *D*?
e) ¿Los resultados son equiprobables? ¿Por qué?
f) Anota la probabilidad de cada resultado.

$P(A) =$ ________ $P(B) =$ ________ $P(C) =$ ________ $P(D) =$ ________

**5** El experimento del ratón se replica en los siguientes laberintos. Señala con ✓ aquellos cuyos resultados sean equiprobables.



☐ ☐ ☐

**6** Para responder la pregunta inicial, discutan en grupo las características de los eventos equiprobables, aplíquenlos al juego de la lotería y elaboren sus conclusiones.

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

## Juegos justos II

PREGUNTA INICIAL

Al lanzar dos dados y sumar los puntos que caen, ¿se obtienen resultados equiprobables? ¿Por qué?

**1** Completa la tabla anotando la diferencia de los puntos al lanzar dos dados.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

a) ¿Es igualmente probable obtener 0, 1 o 2 que 3, 4 o 5? ____________

¿Por qué? ____________

b) ¿Es justo el juego con dos dados de la página 236? ________ ¿Por qué? ________

c) Señala con ✓ las parejas de eventos equiprobables.

| Evento 1 | Evento 2 | ¿Son equiprobables? |
|---|---|---|
| La diferencia de los puntos es 5. | La diferencia de los puntos es 4. | ☐ |
| La diferencia de los puntos es par. | La diferencia de los puntos es impar. | ☐ |
| La diferencia de los puntos es 1. | La diferencia de los puntos es 2. | ☐ |
| La diferencia de los puntos es 1. | La diferencia de los puntos es 3 o 4. | ☐ |
| La diferencia de los puntos es 2 o 3. | La diferencia de los puntos es 4. | ☐ |

d) Diseñen en equipo un juego justo para dos personas en el que se utilice la diferencia entre los puntos de dos dados. Comparen su juego con el de otros equipos y expliquen por qué es un juego justo. Comenten cómo determinaron que sus eventos son equiprobables.

**TIC**

Ingresa al sitio <www.geogebratube.org/student/m4265>. Examina el juego que ahí se presenta y determina si es justo o no. Reúnanse en equipos y expongan sus conclusiones al grupo.





**2** Lean en equipo en qué consiste el experimento aleatorio y en su cuaderno lleven a cabo lo que se pide.

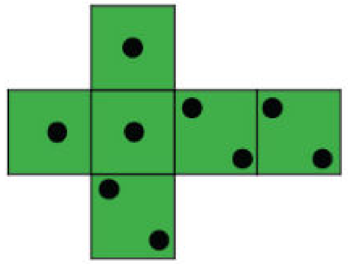
En una caja hay 10 pelotas numeradas de 1 a 10. Se saca una pelota y se regresa a la caja.

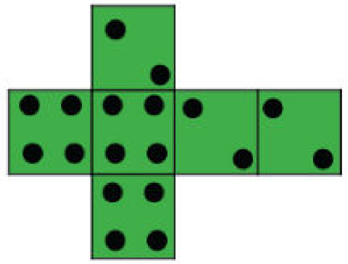
a) Diseñen, usando la caja, un juego justo para dos personas.
b) Comparen sus juegos con los de otros equipos y expliquen por qué se trata de un juego justo.

**3** Elabora en tu cuaderno un diagrama para encontrar los resultados del experimento de lanzar tres monedas y contesta.

¿Es justo el juego de carrera de monedas de la página 236? ______ ¿Por qué?

**4** Observa estos dados.





Marca con ✓ los eventos equiprobables al lanzar los dados anteriores.

| Evento 1 | Evento 2 | ¿Son equiprobables? |
|---|---|---|
| La suma de los puntos es 6. | La suma de los puntos es 4. | ☐ |
| La suma de los puntos es par. | La suma de los puntos es impar. | ☐ |
| La suma de los puntos es mayor que 3. | La diferencia de los puntos es 3. | ☐ |
| La diferencia de los puntos es 2. | La diferencia de los puntos es 0. | ☐ |
| La diferencia de los puntos es 3. | La diferencia de los puntos es 2. | ☐ |

- Diseña un juego justo y uno injusto con los dados. Intercámbialos con un compañero para que identifiquen cuál es el juego justo y expliquen por qué lo es.

**Observa**

El dado tiene sus orígenes desde antes de los griegos. En Roma se llamaba *álea*, de ahí proviene *aleatorio* o *al azar*. El emperador Julio César decía: *"Alea jacta est"*, es decir, *el dado tirado está*.

**5** Para responder la pregunta inicial, en equipos de cuatro o cinco integrantes desarrollen el juego con las condiciones señaladas en esta pregunta. Redacten su respuesta basándose en el concepto de eventos equiprobables y léanla ante el grupo. Comenten sus diferencias y coincidencias.

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Analiza las siguientes preguntas y subraya la respuesta correcta.

**1** Martha y Andrea compraron uvas y manzanas en un puesto del mercado. Martha pagó \$135.00 por 2 kg de uva y 1 kg de manzana; mientras que Andrea pagó \$105.00 por 1 kg de uva y 2 kg de manzana. ¿Cuánto cuesta 1 kg de manzana?

a) \$25.00 b) \$50.00

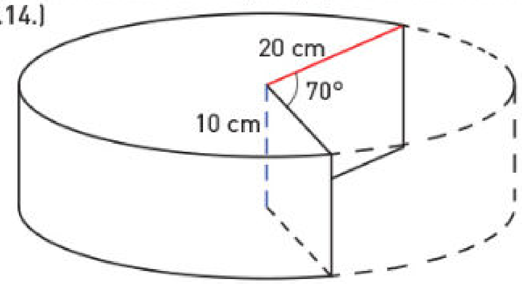
c) \$55.00 d) \$110.00

**2** Una persona le dio tres usos a su aguinaldo: la mitad la invirtió en un fondo de ahorro; la tercera parte la gastó en vacacionar; y con los \$3 000.00 restantes pagó la reparación de su automóvil. Si $x$ representa el total de su aguinaldo, ¿qué igualdad es verdadera?

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=-3000$ b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=3000$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+3000=x$ d) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-3000=x$

**3** Para fabricar una pieza de metal, se le quitó un sector a un cilindro de 20 cm de radio y 10 cm de altura, como muestra la imagen. ¿Qué volumen tiene el cilindro recortado? (Considera $\pi \cdot 3.14$.)




a) 10 118 cm³ b) 3373 cm³

c) 2442 cm³ d) 814 cm³

**4** A un cono de 50 cm de altura y 15 cm de radio se le hará un corte paralelo a la base para obtener un cono más pequeño en la parte superior. ¿A qué altura hay que cortar para que el radio del nuevo cono mida 9 cm?

a) A 9 cm de la base. b) A 20 cm de la base.

c) A 30 cm de la base. d) A 41 cm de la base.

**5** Un cilindro y un cono tienen la misma altura, pero el radio del cilindro mide el triple que el del cono. ¿Cómo se relacionan los volúmenes de ambos cuerpos?

a) El volumen del cilindro es 27 veces el del cono.

b) El volumen del cilindro es nueve veces el del cono.

c) El volumen del cilindro es tres veces el del cono.

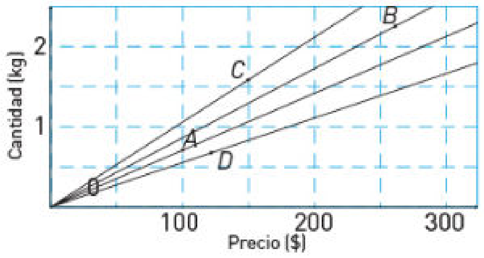
d) Ambos volúmenes son iguales.



**6** Un cilindro de 30 cm de altura tiene 3 000 cm³ de volumen. ¿Cuánto mide el diámetro de su base? (Considera $\pi \cdot 3.14$).

a) 5.64 cm b) 9.77 cm c) 11.28 cm d) 19. 54 cm

**7** Los puntos de la gráfica muestran lo que se pagó en algunas tiendas al comprar distintas cantidades de café a granel. ¿Qué tienda vende más barato el café?




a) La tienda *A*, pues es en la que se pagó menos dinero.

b) La tienda *B*, pues es en la que se compró mayor cantidad de café.

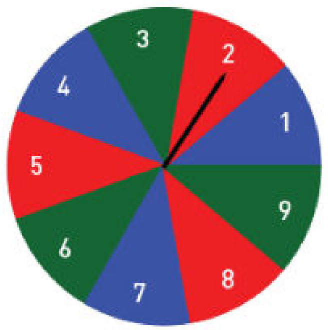
c) La tienda *C*, pues su recta es la de mayor pendiente.

d) La tienda *D*, pues su recta es la de menor pendiente.

**8** Si se descarta la resistencia del aire, la altura ($h$) de un objeto que se lanza hacia arriba con cierta velocidad inicial ($v$) y el tiempo transcurrido ($t$) desde que se soltó, se relacionan mediante la ecuación $h \cdot -4.9t^2 \cdot vt$ (donde $h$ se mide en metros, $t$, en segundos y $v$, en metros sobre segundo). ¿Cuánto tiempo tarda en volver al suelo un objeto que se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 98 m/s?

a) 5 s b) 10 s c) 15 s d) 20 s

**9** En un juego de mesa, Abel y Aldo giran una ruleta como la que se muestra y obtienen fichas dependiendo de la casilla en que pare la flecha: si se detiene en número par, Abel obtiene cinco fichas; si lo hace en el número 7, Aldo obtiene cierta cantidad de fichas. ¿Cuántas fichas debe recibir Aldo para que el juego sea justo?




a) 9 fichas. b) 10 fichas.

c) 18 fichas. d) 20 fichas.

**10** María y Pedro juegan a lanzar dos dados y a sumar el resultado de las caras. ¿Qué condiciones corresponden a un juego justo?

a) María gana si la suma es 7; Pedro, si la suma es 10, 11 o 12.

b) María gana si la suma es par; Pedro, si la suma es impar.

c) María gana si la suma es 2, 3 o 4; Pedro, si la suma es 4, 5 o 6.

d) María gana si la suma es menor que 7; Pedro, en todos los demás casos.

**Lee la información y responde lo que se pide.**

Un juego de azar es justo si la cantidad invertida es igual a la probabilidad de ganar, multiplicada por el monto del premio; en caso contrario se dice que el juego es injusto. Por ejemplo:

Miguel lanza una moneda y apuesta \$5.00 a que acierta qué cara saldrá. Si lo logra, recibe \$10.00; en caso contrario, pierde sus \$5.00.

Para un sorteo se entregará un único premio de \$1 500.00 al boleto ganador. Se vendieron 100 boletos a \$20.00 cada uno.

Andrea lanza dos dados y apuesta \$1.00 a que ambos caerán en el mismo número (por ejemplo, 5 y 5). Si acierta, recibe \$10.00; en caso contrario, pierde su apuesta inicial.

**Pregunta 1.** El sorteo del boleto ganador mencionado en el texto inicial es injusto. Explica por qué.

______________________________

Explica cuál debe ser el precio de cada boleto para que el sorteo sea justo.

______________________________

**Pregunta 2.** Explica si los otros dos juegos mencionados son justos o injustos; si alguno es injusto, indica cuál debe ser el premio para volverlo justo. ______________________________

______________________________

**Pregunta 3.** Un juego es favorable para el jugador si a la larga gana más dinero del que pierde.

¿Qué juego del texto inicial es favorable para el jugador? ______________________________

¿Cómo se relacionan en este caso el monto del premio, la probabilidad de ganar y la cantidad invertida? ______________________________

______________________________

**Pregunta 4.** Diseña un juego de azar distinto a los del texto inicial (que no involucre dados, monedas o sorteos con boletos) y explica si es justo, favorable o desfavorable para el jugador.

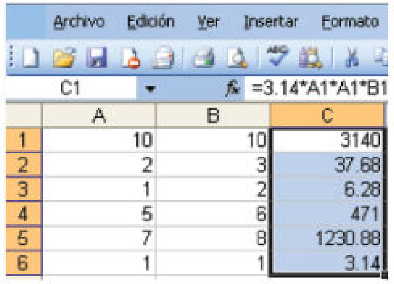




## TIC. Volumen de conos y cilindros en la hoja de cálculo

Elabora en una hoja de cálculo alguno de los siguientes proyectos.

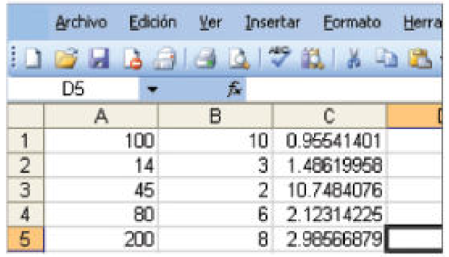
1. Se introducen las medidas del radio y la altura de un cilindro. Así se obtiene el volumen.



C1 =3.14*A1*A1*B1

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 10 | 3140 |
| 2 | 2 | 3 | 37.68 |
| 3 | 1 | 2 | 6.28 |
| 4 | 5 | 6 | 471 |
| 5 | 7 | 8 | 1230.88 |
| 6 | 1 | 1 | 3.14 |

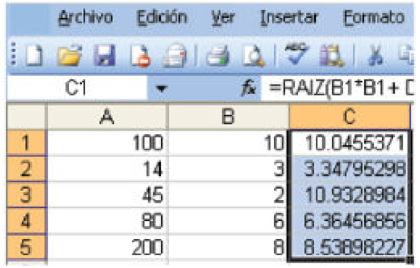
2. Se introducen el volumen de un cono y su radio. Así se obtiene su altura.



D5

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 10 | 0.95541401 |
| 2 | 14 | 3 | 1.48619958 |
| 3 | 45 | 2 | 10.7484076 |
| 4 | 80 | 6 | 2.12314225 |
| 5 | 200 | 8 | 2.98566879 |

3. Se introduce el volumen del cono y su altura. Así se obtiene la generatriz.



C1 =RAIZ(B1*B1+C

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 10 | 10.0455371 |
| 2 | 14 | 3 | 3.34795298 |
| 3 | 45 | 2 | 10.9328984 |
| 4 | 80 | 6 | 6.36456856 |
| 5 | 200 | 8 | 8.53898227 |

Grafica en una hoja de cálculo los datos que obtuviste en las encuestas que elaboraste en las lecciones anteriores.

## Autoevaluación

Analiza tu desempeño respecto a los aprendizajes esperados del bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

| | Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos | Lo hago solo | Lo hago con ayuda de otros | Necesito la ayuda del profesor |
|---|---|---|---|---|
| Resolver problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. | | | | |
| Resolver problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. | | | | |
| Anticipar cómo cambia el volumen de cilindros y conos al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones. | | | | |
| Leer y representar, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas. | | | | |
| Resolver problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. | | | | |

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.

# Anexo 1

## Tablas trigonométricas

| Ángulo | Sen | Cos | Tan |
|---|---|---|---|
| 00° | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 |
| 01° | 0.0175 | 0.9998 | 0.0175 |
| 02° | 0.0349 | 0.9994 | 0.0349 |
| 03° | 0.0523 | 0.9986 | 0.0524 |
| 04° | 0.0698 | 0.9976 | 0.0699 |
| 05° | 0.0872 | 0.9962 | 0.0875 |
| 06° | 0.1045 | 0.9945 | 0.1051 |
| 07° | 0.1219 | 0.9925 | 0.1228 |
| 08° | 0.1392 | 0.9903 | 0.1405 |
| 09° | 0.1564 | 0.9877 | 0.1584 |
| 10° | 0.1736 | 0.9848 | 0.1763 |
| 11° | 0.1908 | 0.9816 | 0.1944 |
| 12° | 0.2079 | 0.9781 | 0.2126 |
| 13° | 0.2250 | 0.9744 | 0.2309 |
| 14° | 0.2419 | 0.9703 | 0.2493 |
| 15° | 0.2588 | 0.9659 | 0.2679 |
| 16° | 0.2756 | 0.9613 | 0.2867 |
| 17° | 0.2924 | 0.9563 | 0.3057 |
| 18° | 0.3090 | 0.9511 | 0.3249 |
| 19° | 0.3256 | 0.9455 | 0.3443 |
| 20° | 0.3420 | 0.9397 | 0.3640 |
| 21° | 0.3584 | 0.9336 | 0.3839 |
| 22° | 0.3746 | 0.9272 | 0.4040 |
| 23° | 0.3907 | 0.9205 | 0.4245 |
| 24° | 0.4067 | 0.9135 | 0.4452 |
| 25° | 0.4226 | 0.9063 | 0.4663 |
| 26° | 0.4384 | 0.8988 | 0.4877 |
| 27° | 0.4540 | 0.8910 | 0.5095 |
| 28° | 0.4695 | 0.8829 | 0.5317 |
| 29° | 0.4848 | 0.8746 | 0.5543 |
| 30° | 0.5000 | 0.8660 | 0.5774 |
| 31° | 0.5150 | 0.8572 | 0.6009 |
| 32° | 0.5299 | 0.8480 | 0.6249 |
| 33° | 0.5446 | 0.8387 | 0.6494 |
| 34° | 0.5592 | 0.8290 | 0.6745 |
| 35° | 0.5736 | 0.8192 | 0.7002 |
| 36° | 0.5878 | 0.8090 | 0.7265 |
| 37° | 0.6018 | 0.7986 | 0.7536 |
| 38° | 0.6157 | 0.7880 | 0.7813 |
| 39° | 0.6293 | 0.7771 | 0.8098 |
| 40° | 0.6428 | 0.7660 | 0.8391 |
| 41° | 0.6561 | 0.7547 | 0.8693 |
| 42° | 0.6691 | 0.7431 | 0.9004 |
| 43° | 0.6820 | 0.7314 | 0.9325 |
| 44° | 0.6947 | 0.7193 | 0.9657 |
| 45° | 0.7071 | 0.7071 | 1.0000 |
| | Sen | Cos | Tan |

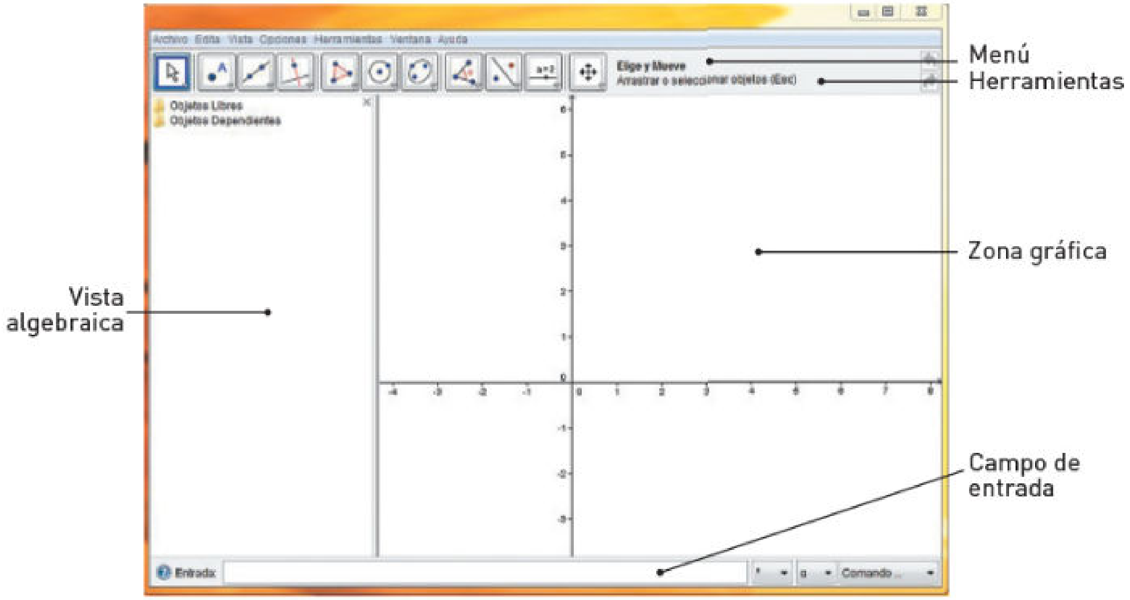
| Ángulo | Sen | Cos | Tan |
|---|---|---|---|
| 46° | 0.7193 | 0.6947 | 1.0355 |
| 47° | 0.7314 | 0.6820 | 1.0724 |
| 48° | 0.7431 | 0.6691 | 1.1106 |
| 49° | 0.7547 | 0.6561 | 1.1504 |
| 50° | 0.7660 | 0.6428 | 1.1918 |
| 51° | 0.7771 | 0.6293 | 1.2349 |
| 52° | 0.7880 | 0.6157 | 1.2799 |
| 53° | 0.7986 | 0.6018 | 1.3270 |
| 54° | 0.8090 | 0.5878 | 1.3764 |
| 55° | 0.8192 | 0.5736 | 1.4281 |
| 56° | 0.8290 | 0.5592 | 1.4826 |
| 57° | 0.8387 | 0.5446 | 1.5399 |
| 58° | 0.8480 | 0.5299 | 1.6003 |
| 59° | 0.8572 | 0.5150 | 1.6643 |
| 60° | 0.8660 | 0.5000 | 1.7321 |
| 61° | 0.8746 | 0.4848 | 1.8040 |
| 62° | 0.8829 | 0.4695 | 1.8807 |
| 63° | 0.8910 | 0.4540 | 1.9626 |
| 64° | 0.8988 | 0.4384 | 2.0503 |
| 65° | 0.9063 | 0.4226 | 2.1445 |
| 66° | 0.9135 | 0.4067 | 2.2460 |
| 67° | 0.9205 | 0.3907 | 2.3559 |
| 68° | 0.9272 | 0.3746 | 2.4751 |
| 69° | 0.9336 | 0.3584 | 2.6051 |
| 70° | 0.9397 | 0.3420 | 2.7475 |
| 71° | 0.9455 | 0.3256 | 2.9042 |
| 72° | 0.9511 | 0.3090 | 3.0777 |
| 73° | 0.9563 | 0.2924 | 3.2709 |
| 74° | 0.9613 | 0.2756 | 3.4874 |
| 75° | 0.9659 | 0.2588 | 3.7321 |
| 76° | 0.9703 | 0.2419 | 4.0108 |
| 77° | 0.9744 | 0.2250 | 4.3315 |
| 78° | 0.9781 | 0.2079 | 4.7046 |
| 79° | 0.9816 | 0.1908 | 5.1446 |
| 80° | 0.9848 | 0.1736 | 5.6713 |
| 81° | 0.9877 | 0.1564 | 6.3138 |
| 82° | 0.9903 | 0.1392 | 7.1154 |
| 83° | 0.9925 | 0.1219 | 8.1443 |
| 84° | 0.9945 | 0.1045 | 9.5144 |
| 85° | 0.9962 | 0.0872 | 11.4301 |
| 86° | 0.9976 | 0.0698 | 14.3007 |
| 87° | 0.9986 | 0.0523 | 19.0811 |
| 88° | 0.9994 | 0.0349 | 28.6363 |
| 89° | 0.9998 | 0.0175 | 57.2900 |
| 90° | 1.0000 | 0.0000 | ----- |
| | Sen | Cos | Tan |



# Anexo 2

## Uso de GeoGebra

Cuando abras este programa verás una ventana como la siguiente. Observa y analiza la imagen para que te familiarices con cada sección de la pantalla principal.



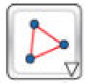

En la barra de herramientas hallarás botones como los siguientes.


Al apretar este botón podrás trazar un punto haciendo dos clics en cualquier lugar del plano cartesiano.

En la región de *Vista algebraica* aparecerán las coordenadas del punto.

Este botón te permite trazar una línea haciendo clic en dos puntos cualesquiera del plano cartesiano.

En la vista algebraica podrás consultar la ecuación de la recta que trazaste. Si deseas que esta ecuación se presente en la forma $y = mx + b$, pulsa el botón izquierdo del *mouse* sobre la ecuación. En el menú que aparece elige *Propiedades* y la presentación deseada en el campo *Ecuación*.



Con este botón trazarás un polígono señalando sus vértices en el plano cartesiano.

En la vista algebraica verás la longitud de cada lado.

Practica con estos botones trazando puntos, líneas y polígonos en el plano. El funcionamiento de los otros botones es muy parecido. De cualquier forma, siempre puedes consultar la ayuda incluida en el programa.

# Glosario

**Abscisa** Primera coordenada de una pareja ordenada. En la pareja ordenada $(x, y)$, $x$ corresponde a la abscisa.

**Ángulo adyacente a un segmento** Es el ángulo que se encuentra en el extremo de un segmento de recta.

**Ángulos congruentes** Son ángulos que tienen la misma medida.

**Ángulos homólogos** Son ángulos que se corresponden entre dos o más polígonos.

**Apotema** En un polígono regular, es la distancia del centro a la mitad de cualquiera de sus lados.

**Arista** Línea que resulta de la intersección de dos superficies.

**Centro de rotación** Punto fijo alrededor del cual gira un punto o una figura.

**Cociente** Resultado de una división.

**Coeficiente** La parte que multiplica la variable en un término.

**Constante de proporcionalidad** Cuando dos conjuntos son proporcionales, el cociente entre los elementos que se corresponden es constante. Esa constante es la constante de proporcionalidad.

**Ecuación** Igualdad que contiene literales y coeficientes relacionados con operaciones aritméticas.

**Espacio muestral** Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

**Evento** Cualquiera de los resultados posibles de un experimento aleatorio.

**Factor** Cada una de las cantidades que se multiplican para obtener un producto.

**Figuras semejantes** Son dos figuras que tienen la misma forma y las medidas de los lados correspondientes son proporcionales.

**Frecuencia absoluta** Número de veces que se repite un dato.

**Frecuencia relativa** Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el total de datos.



**Función** Relación entre dos conjuntos de cantidades que asigna un valor y sólo un valor del segundo conjunto a cada uno del primero.

**Intersecar** En geometría quiere decir que se cruzan dos o más líneas.

**Lado adyacente a un ángulo** Es el lado de un polígono que también es lado de un ángulo.

**Lados congruentes** Son lados que miden lo mismo, que pertenecen a uno o varios polígonos.

**Lados homólogos** Son lados de dos o más polígonos que se corresponden.

**Media** En un conjunto de datos, es el cociente de la suma de los valores de los datos y el número de ellos.

**Muestra** Es una parte de la población que se elige con técnicas especiales para que sea representativa.

**Ordenada** Segunda coordenada de una pareja ordenada. En la pareja ordenada $(x, y)$, $y$ corresponde a la ordenada.

**Pendiente** La pendiente $m$ es la razón de cambio de la variación vertical $(y)$ entre la variación horizontal $(x)$ al considerar dos puntos de una recta: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

**Población** Es un grupo de elementos que comparten características específicas.

**Razón** Es la comparación de dos cantidades por medio de un cociente.

**Razón de cambio** Es la magnitud del cambio de una variable por unidad con respecto a otra variable.

**Simétrico** Cuerpo o figura que cuenta con una correspondencia exacta en la disposición regular de sus partes o puntos con relación a un centro, un eje o un plano.

**Teselado** Colección de figuras que cubren el plano sin superponerse ni dejar huecos.

# Bibliografía

## Para el alumno


Bailey, Gerry, *Inventos de alta tecnología*, México, SEP-Ediciones SM, 2006.

Baldor, José Aurelio, *Álgebra*, México, Grupo Editorial Patria, 2012.

________, *Geometría plana y del espacio y trigonometría*, México, Grupo Editorial Patria, 2008.

Blatner, David, *El encanto de pi*, México, Aguilar, 2003.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez, *Una ventana a las formas*, México, Santillana, 2003.

De la Peña, José Antonio, *Geometría y el mundo*, México, Santillana, 2002.

Infeld, Leopold, *El elegido de los dioses. La historia de Évariste Galois*, México, Siglo XXI, 2001.

Jouette, André, *El secreto de los números*, Barcelona, Swing, 2008.

Lewin, Walter y Warren Goldstein, *Por amor a la física*, México, Debate, 2013.

Moscovich, Ivan, *Brainmatics. Rompecabezas lógicos*, Königswinter, H. F. Ullmann, 2009.

Reshetkov, Alexander, *50 paradojas de la física*, México, Limusa, 2012.

Ruiz, Concepción y Sergio de Régules, *Crónicas geométricas*, México, SEP-Santillana, 2002.

________, *El piropo matemático. De los números a las estrellas*, México, SEP-Lectorum, 2003.

Swokowski, Earl W. y Jeffery A. Cole, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, México, Cengage Learning, 2011.

Tahan, Malba y Basilio Losada, *El hombre que calculaba*, España, Verón, 2000.


## Para el maestro


Alarcón, Jesús e Higinio Barrón, *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Guía de estudio y lecturas*, México, SEP, 2011.

Berlanga Zubiaga, Ricardo, Carlos Bosch Giral y Juan José Rivaud Morayta, *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, México, FCE, SEP, Conacyt, 2003.

Hitt, Fernando, *Funciones en contexto*, México, Prentice Hall, 2002.

Medina Rivilla, Antonio, Agustín de la Herrán Gascón y María Concepción Domínguez Garrido (coords.), *Fronteras en la investigación de la didáctica*, Madrid, UNED, 2014.


## Bibliografía consultada


Baldor, José Aurelio, *Álgebra*, México, Grupo Editorial Patria, 2012.

________, *Geometría plana y del espacio y trigonometría*, México, Grupo Editorial Patria, 2008.

Courant, Richard y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, FCE, 2002.

Rodríguez Arós, A., F. Blanco y M. J. Muiños, *Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación*, España, Paraninfo, 2012.

Wells, David, *El curioso mundo de las matemáticas*, Barcelona, Gedisa, 2000.

Zill, Dennis G. y Jacqueline M. Dewar, *Álgebra y trigonometría*, México, McGraw-Hill Interamericana, 2000.




# Enlaces *web*

## Para el alumno


**Clic seguro. Portal de la Secretaría de Educación Pública.** Consejos prácticos para usar las tecnologías de la información y la comunicación de forma segura. Disponible en: ‹http://www.clicseguro.sep.gob.mx/index.php›

**Matechavos. Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora (PUEMAC).** Juegos, acertijos e información matemática para aprender algo nuevo o poner en práctica lo que ya sabes. Disponible en: ‹arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/matechavos/html/index.html›

**Matemáticas divertidas.** Juegos interactivos para repasar conceptos básicos de aritmética y geometría. Disponible en: ‹http://www.matematicasdivertidas.com/index.html›

**Refuerza y amplía tus matemáticas.** Actividades interactivas para repasar y consolidar tus conocimientos. Disponible en: ‹www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/andared02/refuerzo_matematicas/indicemate.htm›

**Telesecundaria. Zona de videos.** Visita la zona de videos de telesecundaria, ponte al corriente y no te quedes atrás. Disponible en: ‹http://televisioneducativa.gob.mx/index.php/videos-telesecundaria›


## Para el maestro


**DivulgaMAT. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española.** En este portal encontrará artículos, ensayos, noticias e información reciente referida a la divulgación de las matemáticas. Disponible en: ‹www.divulgamat.net›

**Eduteka. Simulaciones de matemáticas y física.** Aquí hallará ficheros descargables con simulaciones para trabajar con el estudiante. Disponible en: ‹www.eduteka.org/instalables.php3›

**Math Media. Recursos educativos especializados en matemáticas.** Presenta distintas estrategias didácticas, artículos, referencias bibliográficas, sitios de interés para profesores y alumnos, entre otros. Disponible en: ‹http://cuaed.unam.mx/math_media/›

**Micrositio pensamiento lógico matemático.** En este sitio encontrará actividades para mostrar al estudiante aspectos de las matemáticas poco conocidos. Disponible en: ‹http://red.ilce.edu.mx/sitios/pensa_logico/guia_prof.htm›

**Proyecto Gauss.** En este portal hallará actividades interactivas para el alumno; la mayoría utilizan una herramienta de geometría dinámica de uso libre. Las actividades pueden descargarse para trabajar en equipos sin acceso a internet. Disponible en: ‹recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/novedades.htm›

### Créditos iconográficos





# COMUNIDAD Matemática 3

- Cada contenido del programa se desarrolla en una secuencia de lecciones y cada una consta de dos páginas.
- Las lecciones comienzan con actividades que los alumnos resolverán con lo que ya saben. Dichas actividades los estimularán para aprender nuevos procedimientos y estrategias de resolución de problemas.
- La finalidad de las situaciones es atraer la atención de los alumnos y permitir su participación activa en ellas, así como fomentar que hagan el análisis y reflexionen sobre las estrategias que llevarán a cabo y las justifiquen.

En **www.secundaria-sm.com.mx** podrá registrarse para que se le asigne un código con el que tendrá acceso a contenido digital y a una guía didáctica que, además del solucionario del libro, le orientará en el tratamiento de los contenidos, así como a evaluaciones (reactivos de opción múltiple y tipo PISA), avances programáticos editables y herramientas para el seguimiento del aprendizaje.

www.ediciones-sm.com.mx

978-607-24-1592-8

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

161971